clasele IX - XII

C. Năstăsescu C. Niţă
M. Brandiburu D. Joiţa

Culegere de probleme pentru liceu

Algebră

Matematică

EDITURA ROTECH PRO

Prof. Univ. Dr. C. Năstăsescu
(membru corespondent al Academiei Române)

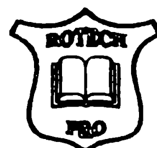
Prof. Univ. Dr. C. Niţă

Prof. M. Brandiburu

Prof. D. Joiţa

ALGEBRĂ
CULEGERE DE PROBLEME PENTRU LICEU

clasele IX - XII



EDITURA ROTECH PRO
- 1997 -

NOTĂ

Prezenta lucrare este o versiune îmbunătăţită a culegerii de probleme „Exerciţii şi probleme de algebră, clasele IX - XII“ de aceeaşi autori, tipărită pentru prima oară în 1981.

Culegerea a constituit lucrarea de bază pentru algebra de liceu, bucurându-se de un deosebit succes în rândul profesorilor şi elevilor.

ISBN 973-97010-6-x

Tehnoredactare computerizată şi copertă: **ROTECH PRO**

Tel. (01) 642.85.54
Tel./Fax (01) 250.68.07

CUPRINS

Partea I
Enunţuri

Partea a II-a
Indicaţii. Soluţii. Răspunsuri

Partea I
ENUNŢURI

Capitolul I
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $2 + 3 = 5$; b) $2 \cdot 3 < 6$; c) $4 \cdot 4 = 16$; d) $4 + 3 < 1 + 5$; e) $4 \cdot 5 - 6 = 2 \cdot 7$; f) $4 - 2(5 - 3) = 1$; g) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < 1$.

2. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) există un număr întreg x, astfel încât $x^2 - 2x - 3 = 0$;
b) există un număr real x, astfel încât $|x - 1| + |x - 2| = 0$;
c) există un număr real x, astfel încât $x^2 - x + 1 = 0$;
d) există un număr real x, astfel încât $|x - 1| + |x^2 - 3x + 2| = 0$;
e) există un număr real x, astfel încât $|x - 1| - |x - 2| < 0$;
f) oricare ar fi numărul real x, avem $x^2 + (x - 1)^2 > 0$;
g) oricare ar fi numărul real x, avem $(x + 1)^2 + |x^2 - 2x + 3| > 0$;
h) oricare ar fi numărul real x, avem $|x - 1| + |x - 3| \neq 0$;
i) oricare ar fi numerele reale x şi y, avem $x^2 + y^2 + 1 > 0$;
j) oricare ar fi numerele reale x şi y, avem $x^2 + y^2 > 0$;
k) există numerele reale x şi y astfel încât $|x - 1| + y^2 + y + 1 = 0$;

3. Folosind tabele de adevăr, să se verifice:
a) $p \vee q \equiv q \vee p$; b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$; c) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; d) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$; e) $p \rightarrow \rceil q \equiv \rceil(p \wedge q)$; f) $\rceil p \rightarrow q \equiv p \vee q$; g) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$; h) $p \vee p \equiv p$; i) $p \wedge p \equiv p$; j) $p \wedge q \equiv \rceil(\rceil p \vee \rceil q)$; k) $p \vee q \equiv \rceil(\rceil p \wedge \rceil q)$; l) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; m) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

4. Să se arate că următoarele formule sunt tautologii (sau identic adevărate):
a) $\rceil(p \vee q) \rightarrow (\rceil p \wedge \rceil q)$; b) $\rceil(p \wedge q) \rightarrow (\rceil p \vee \rceil q)$; c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$; d) $(\rceil q \wedge (\rceil p \rightarrow q)) \rightarrow p$; e) $(\rceil q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \rceil p$; f) $((p \rightarrow q) \wedge (\rceil p \rightarrow q)) \rightarrow q$; g) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$; h) $(p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$; i) $(p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$.

5. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $(\exists x)$ ($x^2 - 5x + 6 = 0$) unde x desemnează un număr întreg;
b) $(\exists x)$ ($2x^2 - x - 3 = 0$) unde x desemnează un număr întreg pozitiv;

c) $(\exists x)\ (|x - 6| + |x + 1| = 0)$ unde x desemnează un număr real;
d) $(\exists x)\ (2x - 6 < 0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;
e) $(\forall x)\ (3x - 1 < 0)$ unde x desemnează un număr real pozitiv;
f) $(\forall x)\ (|x - 2| + |x + 3| > 0)$ unde x desemnează un număr real;
g) $(\forall x)\ (|x - 2| + |2x^2 - 3x + 2| > 0$ unde x desemnează un număr real;
h) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x^2 + y^2 - y + 1 > 0)$ unde x şi y desemnează numere reale;
i) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2 + xy + y^2 + 1 = 0)$ unde x şi y desemnează numere reale;

6. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x - y = 3$", unde x şi y desemnează numere reale. Să se arate că propoziţia

$$(\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y) \to (\exists x)\ (\forall y)\ p(x, y) \text{ este falsă.}$$

7. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x + y \leq 1$", unde x şi y desemnează numere reale. Să se arate că propoziţia

$$(\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y) \to (\exists x)\ (\forall y)\ p(x, y) \text{ este falsă.}$$

8. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x \leq y$", unde x, y desemnează numere întregi.
a) Să se determine valorile de adevăr pentru propoziţiile: $p(1, 5)$; $p(3, -1)$; $p(3, 4)$; $p(3, 1)$; $p(45, 11)$; $p(-2, -10)$.
b) Să se determine valorile de adevăr ale propoziţiilor:
$(\forall x)\ (\forall y)\ p(x, y)$, $(\forall x)\ (\exists y)\ p(x, y)$, $(\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y)$, $(\exists x)\ (\exists y)\ p(x, y)$.

9. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $(\forall x)\ [(x > 0) \to (x^2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;
b) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x < y) \to (x^2 < y^2)]$, unde x, y sunt numere reale;
c) $(\forall x)\ [(x < -2) \to (|x - 1| - 2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;
d) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x^2 = y^2) \to (x = y)]$, unde x, y desemnează numere reale pozitive;
e) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x^2 = y^2) \to (x = y)]$, unde x şi y desemnează numere reale oarecare.

Capitolul II
MULŢIMI

1. Să se determine mulţimile:
a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 6x - 7 = 0\}$; b) $\{x \in \mathbf{N} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$;
c) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$; d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x^2 + 2x - 1 = 0\}$;
e) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$; f) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0\}$;
g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + 1 = 0\}$; h) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| - |x - 3| = 1\}$;
i) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x^2 - 4| - 2x + 1 = 0\}$; j) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2|x| + 3 = 0\}$;

k) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\}$; l) $\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0\}$;
m) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^3 - 5x + 1 = 0\}$; n) $\{x \in \mathbf{Q} \mid |x - 1| + |x - 2| = 3\}$;
p) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + |x + 2| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$;
q) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| - |x - 4| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| - |x - 3| = 1\}$.

2. Să se determine mulţimile A şi B astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,
b) $A \cap B = \{7, 8, 9, 10\}$, c) $B - A = \{4, 5, 6, 11\}$.

3. Să se determine mulţimea E în următoarele cazuri:
a) $\{1, 2, 3, 4\} \subset E$, $\{3, 4, 5, 6\} \subset E$, $E \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şi $\{7, 8\} \cap E = \varnothing$;
b) $E \subset \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $E \subset \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{3, 4\} \subset E$ şi $7 \notin E$.

4. Să se determine mulţimile A şi B astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{3, 4\}$;
c) $A \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$; d) $\{1, 2\} \cap B = \varnothing$.

5. Să se determine mulţimile A şi B astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $B - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$;
c) $\{3, 9\} \cap B = \varnothing$, d) $A \cap B = \{1\}$.

6. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine submulţimile B ale lui A astfel încât $B \cap \{1, 2, 3\} \neq \varnothing$.

7. Fie mulţimea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Să se determine mulţimea formată din toate submulţimile lui A care au proprietatea că nu conţin elementele a şi c.

8. Fie mulţimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se determine mulţimea submulţimilor lui X care au cel mult două elemente.

9. Să se determine mulţimea E şi submulţimile A şi B ale lui E, ştiind că:
a) $E - A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; b) $E - B = \{5, 6, 11, 12\}$; c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.

10. Fie mulţimile $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7, 8, 9\}$. Să se determine mulţimea X astfel încât să aibă loc relaţia $(A - X) \cup (X - B) = \{1, 3\}$, X să aibă patru elemente şi $\{3, 9\} \subset X$.

11. Fie mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se determine mulţimea X astfel încât să aibă loc relaţia $A - X = \{1, 2, 3\}$, $X \subseteq B$ şi X să aibă 3 elemente.

12. Să se determine mulţimile A şi B astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:
a) $A \cup B \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \cap B \supset \{1, 2\}$; c) $3 \notin B$; d) Numărul de elemente ale lui A să fie mai mic decât numărul elementelor lui B.

13. Să se arate că dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci:
a) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$; b) $A = B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$ şi $B - A = \varnothing$.

14. Fie A şi B două submulţimi ale lui E. Dacă notăm $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, să se arate că:
$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap C_E B \cap C_E C) \cup (C_E A \cap B \cap C_E C) \cup (C_E A \cap C_E B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$, oricare ar fi submulţimile A, B, C ale lui E.

15. Fie E o mulţime care conţine două elemente. Să se determine soluţiile (X, Y) ale ecuaţiei $X \cup Y = E$.

16. Fie E o mulţime care conţine două elemente. Să se determine soluţiile (X, Y) ale ecuaţiei $X \cap Y = \varnothing$, (X, Y sunt submulţimi ale lui E).

17. Să se determine mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = \dfrac{6n-7}{2n+1}, n \in \mathbf{Z}\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = \dfrac{3n^2-2n+1}{n^2-1}, n \in \mathbf{N}\}$.

18. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = \dfrac{6n^2+7}{3n+1}, n \in \mathbf{Z}\}$.

19. Să se determine mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, a \in \mathbf{R} \text{ astfel încât } x = \frac{a^2-a+1}{a+1}\}.$$

20. Să se determine mulţimea

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid \exists\, n \in \mathbf{N},\ x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1}\}.$$

21. Să se determine mulţimea $\{x \in \mathbf{Z} \mid \dfrac{x^2-3x+2}{2x+1} \in \mathbf{Z}\}$.

22. Să se determine mulţimea
$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 2 \text{ şi } |x| - 2|y| = -1\}$.

23. Să se determine mulţimea
$A = \{(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid ab = 2160 \text{ şi } c.m.m.d.c.\ (a, b) = 12\}$.

24. Să se determine mulţimea $\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 9y^2 - (x + 1)^2 = 32\}$

25. Să se determine mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x + 1| - |x - 2| < 3\}$.

26. Să se determine mulţimea $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^2 - 2xy + 3y^2 = 8\}$.

27. Să se arate că mulţimea

$\{(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x^2 - abx + a + b = 0\}$ are rădăcini întregi.

28. Să se determine numărul de elemente din mulţimea

$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x + 3y = 1980\}$.

29. Să se determine numărul de elemente din mulţimea

$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 4x + 3y = 1980\}$.

30. Să se determine mulţimea

$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1976}\}$.

31. Să se determine mulţimile A şi B şi numerele m, n, p ştiind că:

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + nx + p = 0\}$,

$A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}$.

32. Să se determine valorile reale ale lui a, astfel încât mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x - \frac{a}{2} = 2\left|2|x| - a^2\right|\}$$

să aibă trei elemente. Să se găsească elementele mulţimii.

33. Fie $m \in \mathbf{R}$. Considerăm mulţimea

$A_m = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x = \dfrac{a^2 + a + m}{a + 1}\}$. Să se arate că:

a) $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$; b) $A_m = \mathbf{R}$, $(\forall)\, m < 0$;

c) Mulţimile A_m, când m parcurge muţimea $\mathbf{R}$, nu au nici un element comun.

34. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$, numere impare. Să se arate că:

$\{x \in \mathbf{Q} \mid ax^2 + bx + c = 0\} = \varnothing$.

35. Fie mulţimile $A = \{x \mid \exists\, n \in \mathbf{N}, x = 3n + 1\}$,

$B = \{x \mid \exists\, m \in \mathbf{N}, x = 7m - 1\}$.

Să se arate că $A \cap B = \{x \mid \exists\, t \in \mathbf{N}, x = 21t + 13\}$.

36. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, are loc egalitatea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + m^2 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + 1 = 0\} = \varnothing$.

37. Fie a, b două numere reale. Să se arate că, dacă $a + b + 1 = 0$, $a \neq b$, $a, b \neq 1$ sau $b = \dfrac{a^2}{4}$ şi $a > 4$, mulţimea

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + b = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + bx + a = 0\}$

are trei elemente.

38. Să se arate că mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 8x + 2m^2 = 0\}$ are exact două elemente, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

39. Să se arate că mulţimea

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 + 8x + m^2 = 0\}$

are unul sau două elemente. Să se determine m pentru care A are un singur element.

40. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + m - 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m + 1)x + m = 0\}.$$

41. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulţimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2(m + 1)x + m = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2mx + m - 1 = 0\}$ are exact patru elemente.

42. Să se determine numărul real m, astfel încât mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m - 1)x + m + 2 = 0\} \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset.$$

43. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + m = 0\} \cap [0, +\infty)$. Discuţie.

44. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + m = 0\}$. Discuţie.

45. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0]$. Discuţie.

46. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + 2(m + 1)x + m - 2 = 0\} \cap [0, +\infty)$. Discuţie.

47. Să se determine a şi b astfel încât să avem:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\} = \emptyset.$$

48. Fie A şi B două submulţimi ale lui E. Folosind problema 14, să se determine submulţimea X a lui E, astfel încât să avem egalitatea

$$(A - X) \cup (X - A) = B.$$

49. Să se arate că nu există un număr finit de numere raţionale q_1, q_2, ..., q_n astfel încât oricare $x \in \mathbf{Q}$ să se poată scrie sub forma

$$x = r_1q_1 + r_2q_2 + ... + r_nq_n,$$

unde $r_i \in \mathbf{Z}$.

Capitolul III
FUNCŢII

1. Fie $A = \{0, 1\}$ şi $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcţiile de la mulţimea A în mulţimea B. Să se precizeze câte din acestea sunt injective.

2. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcţiile $f: A \to B$ astfel încât $f(1) = c$.

3. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{5, 7, 9\}$. Să se determine toate funcţiile $f: A \to B$ astfel încât $f(1) \neq 5$ şi $f(2) \neq 9$.

4. Să se determine funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât:

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 4x - 1 \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

5. Să se determine funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ având proprietatea:

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

6. Să se determine funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$f(1) \neq 0 \text{ şi } f(x) \cdot f(y) = f(x + y - xy), \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

7. Să se demonstreze că nu există nici o funcţie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care să verifice relaţia: $f(x) + f(n - x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

8. Există funcţii $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) - f(-x) = x^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$?

9. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfăcând condiţia:

$$mf(x - 1) + nf(-x) = 2|x| + 1.$$

Să se determine m şi n astfel încât funcţia f să îndeplinească condiţiile $f(-2) = 5$ şi $f(1) = 1$.

10. Există funcţii $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care satisfac proprietatea:

$$f(x - 1) - f(1 - x) = x, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}?$$

11. Să se determine funcţia f care verifică relaţia:

$$4f(x) + 3f(-x) = c|x|, \ c \in \mathbf{R}.$$

Să se traseze graficul funcţiei astfel determinate.

12. Să se determine funcţiile f de gradul întâi, astfel încât $f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.

13. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. Să se determine

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}}$$

14. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(2x - 1, x + 1)$,

b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \min(3x - 1, x + 3)$.

15. Fie funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| + 2$ şi $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = |x - 2| + 1$. Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

16. Fie funcţiile $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = 2n$ şi $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$ Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

17. Fie funcţiile:

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{dacă } x \leq -1 \\ -2, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}.$$

$$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ g(x) = \begin{cases} -3, & \text{dacă } x \leq -2 \\ x - 1, & \text{dacă } x > -2 \end{cases}$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

18. Fie funcţiile:

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2+3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 1$.

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

19. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x+1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze f^{-1}.

20. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 2, \\ 3x-2, & \text{dacă } x < 2. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

21. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{dacă } x \leq 4, \\ 2x-7, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$ Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.

22. Să se arate că următoarele funcţii nu sunt injective:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$; b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^5 - 7x^4 + 1$;

c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$; d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^{1981} - 4x^{1979} + 1$.

23. Fie funcţia $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definită prin egalitatea: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Să se arate că pe intervalul $(0, 1]$, f este strict descrescătoare iar pe intervalul $[1, +\infty)$ este strict crescătoare.

24. Fie funcţiile f şi g, definite pe **R** cu valori în **R**, unde

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4 \text{ şi } g(x) = x^3 + x + 2.$$

Să se arate că f nu este injectivă, iar g este injectivă.

25. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2] \\ mx-3, & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se determine m astfel încât graficul funcţiei să treacă prin punctul A(3, 3).

b) Să se cerceteze dacă funcţia f este injectivă.

26. Pentru orice $m, n \in \mathbf{R}$ se consideră funcţia

$$f_{m,n}: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_{m,n}(x) = \begin{cases} x - m, & \text{pentru } x \le 0, \\ nx + m, & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui m şi n pentru care $f_{m,n}$ este:
a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.

27. Fie a un număr natural. Definim funcţia: $f_a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ astfel încât $f_a(n)$ este ultima cifră a numărului a^n.
a) Să se arate că $\exists\ b$, $0 \le b \le 9$ astfel încât $f_a = f_b$.
b) Să se arate că oricare ar fi a, f_a este o funcţie periodică (adică există un număr natural n_0 astfel încât $f_a(n + n_0) = f_a(n)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ şi $n \neq 0$).

28. Fie A o mulţime care are cel puţin trei elemente. Notăm cu $S_A = \{f : A \to A \mid f \text{ bijecţie}\}$. Dacă $f \in S_A$ şi $f \circ g = g \circ f$, $(\forall)\ g \in S_A$, atunci $f = 1_A$.

29. Fie $f : A \to B$ o funcţie oarecare. Dacă $A' \subset A$ este o submulţime a lui A, mulţimea $f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$ care este o submulţime a lui B se numeşte *imaginea submulţimii A' prin funcţia f*. Dacă $A' = A$, atunci mulţimea $f(A)$ se numeşte *imaginea funcţiei f* şi se notează $\operatorname{Im} f$.

a) Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$.
Să se determine: $f([-1, 1])$; $f([-2, 0])$; $f((-2, 1])$; $f((1, 2))$.

b) Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 2| + 1$.
Să se determine: $f([1, 3])$; $f([-1, 3])$; $f([1, +\infty))$.

c) Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| + |x + 2| - 1$.
Să se determine: $f([0, 1])$; $f([-2, 1])$; $f([-3, 2])$.

30. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că:
a) Dacă X şi Y sunt două submulţimi ale lui A, atunci:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y) \text{ şi } f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y).$$

b) f este injectivă dacă şi numai dacă $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, oricare ar fi submulţimile X şi Y ale lui A.

31. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că:
a) f este injectivă $\Leftrightarrow f(\complement A') \subset \complement f(A')$, $(\forall)\ A' \in \mathcal{P}(A)$;
b) f este surjectivă $\Leftrightarrow f(\complement A') \supset \complement f(A')$, $(\forall)\ A' \in \mathcal{P}(A)$;
c) f este bijectivă $\Leftrightarrow f(\complement A') = \complement f(A')$, $(\forall)\ A' \in \mathcal{P}(A)$.
($\mathcal{P}(A)$ este mulţimea părţilor lui A).

32. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Fie $\mathcal{P}(A)$ şi $\mathcal{P}(B)$ mulţimea părţilor lui A şi respectiv ale lui B. Definim funcţia $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $f_*(A') = f(A')$, $(\forall)\ A' \in \mathcal{P}(A)$. Să se arate că:
a) f este injectivă $\Leftrightarrow f_*$ este injectivă;
b) f este surjectivă $\Leftrightarrow f_*$ este surjectivă;

c) f este bijectivă $\Leftrightarrow$ f_* este bijectivă.

33. Fie funcţia *semn*, sgn : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (2x - 1) \operatorname{sgn} x$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| \operatorname{sgn} x$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1) + x \operatorname{sgn}(x - 2)$.

34. Să se reprezinte grafic funcţia $f : [-a, a] \to \mathbf{R}, a > 0$,

$f(x) = \min\limits_{-a \le t \le x} t^2$.

35. Să se construiască o funcţie $h : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ care să fie surjectivă şi astfel încât $h(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

36. Să se demonstreze că oricare ar fi două funcţii bijective: $f, g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, funcţia $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$ nu este bijectivă.

37. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ şi funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel încât $f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4$. Să se arate că a este negativ.

38. Fie A o mulţime finită având n elemente, $a \in A$, iar $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcţii bijective de la A la A. Să se arate că există $k \le l$ astfel încât

$$(f_k \circ f_{k+1} \circ \ldots \circ f_l)(a) = a.$$

Capitolul IV
NUMERE REALE
(Structura algebrică şi de ordine a mulţimii numerelor reale)

Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât oricare două sunt diferite între ele, să se demonstreze egalităţile:

1. $$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

2. $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

3. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

4. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}=$
$=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab.$

5. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{abc}.$

6. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}=$
$=\dfrac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}.$

Dacă a, b, c, $d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze egalităţile:

7. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$
$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0$; a, b, c, d fiind diferite între ele.

8. $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}=$
$=\dfrac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}.$

Generalizare.

9. Fie a, b, c numere reale nenule, astfel încât oricare două sunt diferite între ele. Să se arate că produsul

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right) \text{ este egal cu:}$$

I) 9, dacă $a + b + c = 0$;

II) 1, dacă $|c| = |a - b|$.

10. Dacă a, b, $c \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(b + c)(c + a)(a + b).$$

Să se deducă de aici că, dacă

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3,$$

atunci $(a + b + c)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. I) Dacă a, b, $c \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right];$$

II) Dacă $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, atunci $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

12. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că:

I) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;

II) $(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$;

III) $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca$.

13. Să se demonstreze că, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$, atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

14. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\leq\frac{a+b+c}{2}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

15. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a + b = 2$. Să se demonstreze că

$$a^4 + b^4 \geq 2.$$

16. Să se demonstreze că din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi dacă şi numai dacă

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

17. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

atunci pentru n, număr natural, avem

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

18. I) Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă m şi n sunt numere naturale de aceeaşi paritate, atunci

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\leq\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2};$$

II) Să se deducă, de aici, că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leq\frac{a^6+b^6}{2}.$$

19. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$a+b+c\leq\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

20. Fie a, b, c, d numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

21. Dacă a, $b \in \mathbf{R}$ astfel încât $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, să se arate că

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

22. Să se demonstreze că

I) $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$;

II) $ab + ac + ad + bc + bd + cd \leq \frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$;

III) *Generalizare.* $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_i a_j \leq \frac{n-1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

23. Fie numerele raţionale $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, unde $b_i > 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se demonstreze că

$$\min_{1\leq i\leq n}\frac{a_i}{b_i} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leq \max_{1\leq i\leq n}\frac{a_i}{b_i}.$$

24. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\min_{1\leq i\leq n} a_i \leq \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \leq \max_{1\leq i\leq n} a_i.$$

25. I) Dacă a, b, t sunt numere reale pozitive astfel încât $a > b > t$, atunci $(a + t)(b - t) < ab$.

II) Să se arate că produsul a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este maxim dacă toţi factorii sunt egali.

26. I) Dacă a, b sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

II) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

III) *Generalizare.* Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive.

Să se arate că

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n}.$$

(*media geometrică* a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu *media aritmetică* a lor).

În ce condiţii are loc egalitatea?

27. Să se arate că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, a', b', c', are loc inegalitatea:

$$\sqrt[3]{(a+a')(b+b')(c+c')} \ge \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'}.$$

28. Fie n un număr natural. Atunci.

I) $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$; II) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$.

29. Să se arate că suma a n numere reale pozitive, al căror produs este constant, este minimă în cazul în care numerele sunt egale între ele.

30. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \ge n.$$

31. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1)\dots(a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \dots a_n} \ge 3^n.$$

32. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1\right)\left(\frac{a_2^2}{a_3^2} + \frac{a_2}{a_3} + 1\right)\dots\left(\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1\right)\left(\frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1\right) \ge 3^n.$$

33. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

(*media armonică* a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu *media geometrică* a lor).

În ce condiţii are loc egalitatea? (vezi ex. 26).

34. Fie $k_1, k_2, \dots, k_n$ numere naturale şi $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Să se demonstreze că produsul $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, unde $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ este constantă, este maxim atunci când numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt proporţionale, respectiv, cu $k_1, k_2, \dots, k_n$.

35. Să se demonstreze că suma pătratelor a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este minimă în cazul în care numerele sunt egale.

36. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2 \le \frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}.$$

37. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Mai mult, egalitatea are loc numai în cazul în care numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt proporționale, respectiv, cu $b_1, b_2, ..., b_n$ (inegalitatea Cauchy-Buniakovski).

38. Să se demonstreze că:

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2,$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere reale pozitive.

39. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+...+\sqrt{a_nb_n} \le \sqrt{a_1+a_2+...+a_n}\sqrt{b_1+b_2+...+b_n}.$$

40. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ numere reale pozitive. Să se arate că $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+...+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+$ $+\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$. (inegalitatea lui Minkovski).

41. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

42. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \le |a_1|+|a_2|+...+|a_n|.$$

43. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}\right| \le |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n|.$$

44. I) Dacă $a, a', b, b' \in \mathbf{R}$, atunci

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) - (ab + a'b')^2 = (ab' - a'b)^2;$$

II) *Generalizare*. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

45. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

$$\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2},$$

unde max (a, b), respectiv min (a, b), reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a şi b.

46. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2(\max(a, b, c) - \min(a, b, c)),$$

unde max (a, b, c), respectiv min (a, b, c), reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a, b, c.

47. Fie $x \in \mathbf{R}$ şi se notează $x_+ = \frac{x+|x|}{2}$ şi $x_- = \frac{-x+|x|}{2}$. Să se arate că $x = x_+ - x_-$ şi $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficul funcţiilor: $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = x_+$ şi $g(x) = x_-$.

48. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că ecuaţia $3x^2 + 2(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$ are rădăcini reale dacă şi numai dacă $a = b = c$.

49. Fie a şi b numere reale pozitive. Să se scrie în ordine crescătoare numerele

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{a^2+b^2}.$$

50. Să se rezolve în mulţimea **R** ecuaţiile:
I) $|3x + 2| = 5$; II) $|x + 1| = |x - 2|$; III) $|x - 1| + |x| + |x + 1| = x + 2$; IV) $||x| - 2| = 10$; V) $||x| - |x + 1|| = |x + 2|$; VI) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$.

51. Să se rezolve în mulţimea **R** a numerelor reale inecuaţiile:
I) $|x - 2| \le 1$; II) $|x + 2| > 1$; III) $|x - 1| + |x| \le 2$; IV) $|x + 1| + |x| > 2$; V) $|x - 1| + |x - 2| \le 0$; VI) $|x + 1| + |x - 2| > 0$; VII) $|x - 1| + |x + 1| \le x + 3$; VIII) $|x + 1| + |x - 2| > x + 1$; IX) $|x + 1| \le |x - 1|$; X) $|x + 2| > |x - 1|$.

52. Să se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită numerele:

a) -5; b) $\frac{17}{6}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) 0; e) $\frac{27}{11}$; f) $-\frac{523}{21}$; g) $-\frac{201}{19}$.

53. Pentru fracţiile zecimale periodice următoare să se determine numărul raţional pe care-l reprezintă şi să se verifice apoi, prin algoritmul de împărţire, că se obţine fracţia zecimală iniţială:
a) 3,(6); b) 1,72(32); c) -3,(12); d) 0,01(25); e) -4,3(042); f) -0,001(3); g) 0,01(02).

54. Să se arate care dintre numerele următoare sunt raţionale şi care iraţionale:

a) -1,56; b) 1,(560); c) -2,53(9); d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{6}$; g) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; h) $\sqrt[3]{2}$; i) $\sqrt[3]{3}$; j) $\sqrt[3]{6}$; k) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

55. Fie $1 \le a \le 9$. Să se arate că fracţia

$$0,a0a00a000a0000a...$$

(după primul a urmează un 0, după al doilea sunt doi de 0 etc.) reprezintă un număr iraţional.

56. Să se arate că fracţia zecimală infinită 0,123456789101112..., în care după virgulă sunt scrise, consecutiv, toate numerele naturale nenule în ordine crescătoare, reprezintă un număr iraţional.

57. Să se arate că în reprezentarea zecimală a oricărui număr iraţional există cel puţin o cifră care se repetă de o infinitate de ori.

58. Să se dea exemple de numere iraţionale pentru care numai două cifre, respectiv numai trei cifre, se repetă de o infinitate de ori.

59. Să se dea un exemplu de un număr raţional a şi de un număr iraţional b, astfel încât

$$\left|\sqrt{3}-a\right| < \frac{1}{1000} \text{ şi } \left|\sqrt{3}-b\right| < \frac{1}{1000}.$$

60. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$. Să se arate că există între a şi b cel puţin un număr raţional şi cel puţin un număr iraţional.

61. Să se arate că pentru orice număr raţional pozitiv a, astfel încât $a^2 < 2$ (respectiv $a^2 > 2$), există un număr raţional pozitiv b, astfel încât $a^2 < b^2 < 2$ (respectiv $a^2 > b^2 > 2$).

62. Să se arate că numerele $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ şi $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ sunt iraţionale.

63. Fie m şi n numere naturale. Să se găsească condiţii în care numerele $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ şi $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ sunt iraţionale. Dar dacă m şi n sunt numere raţionale pozitive?

64. Să se arate că, dacă a este un număr iraţional pozitiv, atunci $\sqrt{a}$ este un număr iraţional.

65. Să se demonstreze că:

I) Suma dintre un număr raţional şi unul iraţional este un număr iraţional. Analog, pentru diferenţă.

II) Dacă a este iraţional, atunci $\frac{1}{a}$ este iraţional.

66. Fie a şi b numere iraţionale astfel încât $a + b$ este raţional. Să se demonstreze că numerele: $a - b$, $a + 2b$ sunt iraţionale.

67. Fie $a, b, a', b' \in \mathbf{Q}$, astfel încât $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Atunci

I) $a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'}$ dacă şi numai dacă $a = a'$ şi $b = b'$;

II) $a+\sqrt{b} \neq a'-\sqrt{b'}$, pentru orice numere raţionale a, b, a', b' iar $\sqrt{b}$ să fie iraţional.

68. Să se determine numerele naturale n astfel încât $\sqrt{n^2+1}$ să fie raţional.

69. Să se determine cele mai mici numere naturale n, pentru care este adevărată inegalitatea $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, dacă

I) $\varepsilon = 0,001725...$; II) $\varepsilon = 0,0003254...$.

70. Să se spună care dintre numerele, din perechile de numere următoare, este mai mare:

a) 5,34297... şi 5,34298...; b) -6,2739... şi -6,2736...; c) $\frac{7}{3}$ şi 2,(42);

d) $-\frac{5}{7}$ şi -0,7(32); e) -2,2 şi -2,1(9); f) π şi 3,14.

71. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decât 10^{-2}, prin lipsă şi prin adaos, pentru numerele:

a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{2}{5}$; e) $\sqrt{11}$; f) $-\sqrt{11}$; g) $\frac{7}{13}$;

h) $-\frac{7}{13}$; i) $\frac{13}{11}$; j) $-\frac{13}{11}$.

72. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale sumei $x + y$, dacă

a) $x = 3,2745...$ şi $y = 2,3478...$;

b) $x = 10,7373...$ şi $y = -11,0354...$.

73. Să se găsească primele două cifre, după virgulă, ale produsului xy, dacă:

a) $x = 1,3426...$ şi $y = 1,1243...$;

b) $x = 2,1357...$ şi $y = 3,2153...$.

74. Să se găsească primele patru cifre, după virgulă, ale sumelor:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$; b) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$; c) $\frac{3}{4}+\sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3}+\sqrt{5}$; e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$;

f) $\sqrt{3}-\frac{11}{9}$; g) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

75. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale produselor:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; c) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{7}$; d) $-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{5}$; e) $-\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$;

f) $-\frac{11}{9}\cdot\sqrt{5}$; g) -0,710710071... × $\sqrt{6}$.

76. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, prin lipsă şi prin adaos, pentru numerele:

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$; c) $\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

d) $\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$.

77. a) Folosind teorema lui Pitagora, să se construiască cu rigla şi compasul segmentele de lungime:

2; 3; 2,(6); 2,5; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{10}$.

b) Să se figureze, pe axa reală, punctele care au ca abscise opusele numerelor de la punctul a).

78. Să se determine numerele raţionale $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu 0,(272).

79. a) Fie $0<\frac{a}{b}<1$ un număr raţional, unde a, $b>0$. Să se arate că, oricare ar fi numărul natural $n\geq 1$, avem

$$\left|\frac{a+n}{b+n}-1\right|<\left|\frac{a}{b}-1\right|.$$

b) Mai mult, să se arate că oricare ar fi $\varepsilon>0$, un număr real arbitrar, există n_0 astfel încât

$$\left|\frac{a+n_0}{b+n_0}-1\right|<\varepsilon.$$

80. Să se determine numerele întregi k, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$ să fie raţionale.

81. Să se demonstreze că, dacă a, b, c, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sunt numere raţionale, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt, de asemenea, numere raţionale.

Generalizare.

82. Fie a un număr real şi notăm cu $\{a\}=a-[a]$ partea fracţionară a sa, iar $n\geq 2$ un număr natural. Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(a)=\{a^n\sqrt{2}\}$ nu este injectivă.

83. Să se determine partea întreagă a numărului $3^{\sqrt{3}}$.

84. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left[\frac{x+3}{4}\right]=\frac{x-2}{3}$; b) $\left[\frac{x^2-3x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{3}$; c) $[2x - 3] = [x + 1]$.

85. a) Fie $\varepsilon \geq 0$ şi $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale astfel încât $|a_1| \leq \varepsilon$, $|a_{i+1} - a_i| \leq \varepsilon$, pentru $i = 1, 2, ..., n - 1$. Să se arate că există un număr natural $k \leq n$, astfel încât

$$\left|a_k-\frac{1}{2}a_n\right|\leq\frac{1}{2}\varepsilon.$$

b) Să se deducă, de aici, că există un număr natural p, astfel încât

$$\left|\sum_{i=1}^{p}a_i-\sum_{i=p+1}^{n}a_i\right|\leq\max_{1\leq i\leq n}|a_i|.$$

86. Fie a, b numere raţionale pozitive şi $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Să se găsească, presupunând că există, numerele raţionale x şi y astfel încât

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

În ce condiţii astfel de numere există?

Aceeaşi problemă pentru egalitatea

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

87. Fie $a, b, c, m \in \mathbf{R}$ astfel încât $m > 0$, $ac < 0$ şi

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0.$$

Definim funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, prin $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Să se demonstreze că

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1)<0.$$

88. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a \neq b$. Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = |x - a| + |x - b|.$$

Generalizare.

89. Să se arate că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem

a) $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$;

b) $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{3n+1}<2.$

90. Să se arate că

$$\sqrt[3]{2} \notin \left\{ p + q\sqrt{r} \mid p,\ q,\ r \in Q \right\}.$$

91. Să se determine mulţimea

$\{a \in \mathbf{Q} \mid$ există $b \in \mathbf{Q}$ astfel încât $5a^2 - 3a + 16 = b^2\}$.

Generalizare.

92. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 - [x] = 3,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

93. Fie $s = \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{12^2} + \ldots + \dfrac{1}{1000^2}$.

Să se arate că $| s - 0{,}105 | < 0{,}006$.

94. Fie a un număr real care are o reprezentare zecimală de forma 0,999..., unde după virgulă sunt 100 de 9 consecutivi. Să se arate că $\sqrt{a}$ are o reprezentare zecimală în care după virgulă sunt, de asemenea, 100 de 9 consecutivi.

95. a) Fie $\alpha > \beta > 0$ numere reale. Să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \text{ şi } \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$$

este mai mare.

b) *Generalizare.* Dacă n este un număr natural, să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}}{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n} \text{ şi } \frac{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n}$$

este mai mare.

96. Fie $a, b, c \in \mathbf{Q}$, iar $p \in \mathbf{N}$ un număr prim. Să se arate că:

$a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0$ dacă şi numai dacă $a = b = c = 0$.

97. Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a. Să se demonstreze că:

a) $[x] + [y] \leq [x + y]$;

b) $\left[\dfrac{[x]}{n}\right] = \left[\dfrac{x}{n}\right]$; $n \neq 0$ fiind un număr întreg;

c) $[x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right] = [2x]$;

d) $[x] + \left[x + \dfrac{1}{n}\right] + \left[x + \dfrac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \dfrac{n-1}{n}\right] = [nx]$.

98. Fie numărul $\frac{n^2+5}{2100}$, unde n este un număr par.

a) Să se arate că fracţia zecimală sub care se reprezintă acest număr raţional este mixtă.

b) Să se găsească cea mai mică valoare a lui n pentru care acest număr se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale finite.

c) Dacă presupunem că n este astfel încât fracţia $\frac{n^2+5}{2100}$ este ireductibilă, să se determine numărul cifrelor din perioadă şi al celor care nu sunt în perioadă.

99. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n ($n \neq 0, -1, -2$), numărul $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracţie periodică mixtă. La fel, pentru $\frac{3n^2+6n+2}{n(n^2-1)}$ ($n \neq 0, \pm 1$).

100. a) Fie a un număr raţional, dat de fracţia ireductibilă $\frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$, care se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică simplă. Să se arate că numărul k al cifrelor perioadei este cel mai mic număr natural astfel încât $10^k - 1$ să fie divizibil prin n.

b) Să se determine numitorii fracţiilor ireductibile care dau numere raţionale ce se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică simplă, a cărei perioadă să aibă 1, 2, 3 sau 4 cifre.

c) Dacă n şi n' sunt numitorii fracţiilor ireductibile, care dau numere raţionale, care se reprezintă sub formă de fracţii zecimale periodice simple având perioadele formate din k, respectiv k' cifre, să se arate că orice fracţie ireductibilă cu numitorul nn' dă un număr raţional care se reprezintă sub forma unei fracţii periodice simple. Mai mult, dacă n şi n' sunt prime între ele, numărul cifrelor din perioada fracţiei zecimale periodice care reprezintă numărul raţional dat de o fracţie ireductibilă de numitor nn' este c.m.m.m.c. al numerelor k şi k'.

101. Să se determine numerele raţionale care se reprezintă sub formă de fracţii zecimale mixte, având o cifră la partea neperiodică şi două cifre în perioadă.

102. Fie $\frac{m}{7}$ şi $\frac{m}{13}$ fracţii ireductibile şi p, respectiv p', numerele date, de perioadele fracţiilor zecimale periodice sub care se reprezintă

numerele raţionale $\frac{m}{7}$ şi $\frac{m}{13}$. Să se arate că $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$.

103. Fie $\frac{m}{n}$ o fracţie ireductibilă care dă un număr raţional ce se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale periodice simple cu perioada formată din n - 1 cifre; fie aceasta $(a_1a_2 .... a_{n-1})$. Să se arate că orice altă fracţie cu acelaşi numitor dă un număr raţional care se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică simplă cu perioada de forma $(a_ia_{i+1}... a_{n-1}, a_1a_2 ... a_{i-1})$, pentru un anumit i, $1 \leq i \leq n - 1$.

104. a) Se dau numerele $\frac{m}{n}$ şi $\frac{m'}{n'}$, care au aceleaşi aproximări zecimale prin lipsă şi prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-p}. Să se arate că numărul $\frac{mk+m'k'}{nk+n'k'}$, în care k şi k' sunt numere întregi, are aceleaşi aproximări zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-p}.

b) Cunoscând resturile r şi r' ale împărţirii lui $10^p \cdot m$ prin n şi respectiv $10^p \cdot m'$ prin n', să se determine restul împărţirii lui $(mk + m'k') \cdot 10^p$ prin $nk + n'k'$.

Capitolul V
FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA
INECUAŢII. SISTEME DE ECUAŢII

1. Să se aducă la forma canonică următoarele funcţii de gradul II:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$; b) $f(x) = -x^2 + 7x + 2$;

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$; d) $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}2x + 0{,}3$;

e) $f(x) = -0{,}4x^2 + x + 0{,}1$; f) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

2. Să se determine axa de simetrie şi vârful parabolei asociat funcţiilor:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; b) $f(x) = x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 12$; d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;

e) $f(x)=0{,}5x^2-0{,}1x+0{,}4$; f) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$.

3. Să se stabilească maximul sau minimul următoarelor funcţii:

a) $f(x)=-x^2+2x-1$; b) $f(x)=0{,}5x^2+x+1$;

c) $f(x)=x^2+3x+2$; d) $f(x)=-2x^2+4x+5$;

e) $f(x)=5x^2-2x+3$; f) $f(x)=x^2-4$.

4. Să se stabilească semnul următoarelor funcţii:

a) $f(x)=x^2-6x+5$; d) $f(x)=x^2-x+\frac{1}{4}$;

b) $f(x)=-x^2-5x-6$; e) $f(x)=-0{,}2x^2+x-0{,}8$;

c) $f(x)=x^2+3x+13$; f) $f(x)=0{,}4x^2-5x$.

5. Să se facă tabloul de variaţie şi să se traseze graficul următoarelor funcţii:

a) $f(x)=x^2-6x+8$; b) $f(x)=-2x^2+7x-5$;

c) $f(x)=-x^2+6x-9$; d) $f(x)=2x^2-3x+1$;

e) $f(x)=-x^2+25$; f) $f(x)=-x^2+10x$.

6. Să se traseze graficul funcţiilor:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=|x^2-2x+1|$;

b) $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=|-x^2+2x+1|$;

c) $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ h(x)=|x^2-5x|+1$;

d) $k:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ k(x)=|2x^2-3x|-1$;

e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+2,\ x\in(-\infty,-2),\\ x^2,\ x\in[-2,2],\\ x+2,\ x\in(2,+\infty);\end{cases}$

f) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=|x^2-9|+|x^2-16|$;

g) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\min(x,x^2)$;

h) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(x,x^2)$;

i) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\min(1,x,x^2)$;

j) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \max(1, x, x^2)$;

k) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \max(2x, x^2)$;

l) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \le 0; \\ x^2+1, x > 0. \end{cases}$

7. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |ax^2 - 3x + c|$. Dacă $0 < a < 2$ şi $c < 0$, să se determine a şi c astfel încât $f(0) = 4$ şi $f(1) = 6$.

8. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcţii să treacă prin punctele: $A(1, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(2, 3)$.

9. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcţii să treacă prin punctele: $A(-2, 20)$, $B(-1, 12)$ şi să taie axa Ox în punctul de coordonate $C(2, 0)$.

10. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât să aibă vârful în punctul $V(4, -4)$ şi să taie axa Oy în punctul $A(0, 12)$.

11. Să se determine valoarea lui x pentru care

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$$

ia cea mai mică valoare, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

12. Să se arate că următoarele funcţii sunt strict crescătoare:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x < 0, \\ x^2+1, \text{ dacă } x \ge 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \le 1, \\ x^2 - 2x + 2, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$

13. Să se arate că următoarele funcţii sunt strict descrescătoare:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+1, \text{ dacă } x \le 0, \\ -x^2+1, \text{ dacă } x > 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, \text{ dacă } x \le 2, \\ -x^2 + 4x - 2, \text{ dacă } x > 2. \end{cases}$

14. Să se arate că funcţiile de la problemele 12 şi 13 sunt bijective şi să se determine inversele lor.

15. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx+c$ ştiind că admite un maxim egal cu 9 şi trece prin punctele $A(1,-7)$ şi $B(-1,-27)$.

16. Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuaţiilor următoare să existe relaţia scrisă în dreptul fiecăreia:

a) $(m+1)x^2+2mx+5=0$, $\quad x_1-x_2=2$;

b) $(m-2)x^2+(3m-5)x+3=0$, $\quad x_1=x_2$;

c) $(m+3)x^2+mx+m+1=0$, $\quad x_1=3x_2$;

d) $3x^2+(m-3)x+m+5=0$, $\quad x_1^2+x_2^2=\frac{8}{3}$;

e) $(m+5)x^2-(m+7)x-m+3=0$, $\quad x_1x_2=x_1+x_2$;

f) $mx^2-(m-1)x-m+1=0$, $\quad x_1^3+x_2^3=4$;

g) $mx^2+(m^2-2)x+2(m+1)=0$, $\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$;

h) $(m+2)x^2+(m-3)x+m=0$, $\quad x_1+x_2+2x_1x_2=\frac{3}{2}$;

i) $x^2+mx+2m+8=0$, $\quad x_1=2x_2$;

j) $x^2+2(3m+2)x+3(2m+1)=0$, $\quad x_1^2+x_2^2=\frac{10m}{3}x_1x_2$;

k) $x^2-(m+1)x+m=0$, $\quad |x_1-x_2|=1$.

17. Să se calculeze, în funcţie de $m \in \mathbf{R}$, expresiile:

a) x_1+x_2; b) x_1x_2; c) $x_1^2+x_2^2$; d) x_1-x_2; e) $x_1^3+x_2^3$;

f) $x_1^4+x_2^4$; g) $x_1^5+x_2^5$; h) $x_1^{-1}+x_2^{-1}$; i) $x_1^{-2}+x_2^{-2}$;

j) $x_1^{-3}+x_2^{-3}$ cu $x_1, x_2 \neq 0$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2-mx+m+1=0$.

18. Să se calculeze, în funcţie de m, expresiile:

a) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$; b) $\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2-m^2x+m^2+1=0$.

19. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care are ca rădăcini:

a) $x_1=7, x_2=-7$; b) $x_1=0, x_2=-5$; c) $x_1=\frac{5}{3}, x_2=\frac{3}{5}$.

d) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5}{7}$; e) $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}, x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$.

20. Se dă ecuaţia $2x^2 + (m+1)x + 5m - 2 = 0$. Să se formeze ecuaţia în y ale cărei rădăcini îndeplinesc condiţiile:

a) $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}$; b) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$;

c) $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 x_2$; d) $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_2}$;

e) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_1}$; f) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$;

g) $y_1 = x_1^3, y_2 = x_2^3$; h) $y_1 = x_1^{-2}, y_2 = x_2^{-2}$;

i) $y_1 = x_1^{-3}, y_2 = x_2^{-3}$.

21. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $3x^2 + 5x + 3 > 1$; b) $-2x^2 + 6x - 3 < 5$; c) $6x^2 + 2x - 3 > 0$;

d) $5x^2 + 3x + 1 > 0$; e) $-8x^2 + 2x + 6 < 0$; f) $7x^2 + 3x - 4 < 0$;

g) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 3x + 4} > 3$; h) $\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+7} > \frac{2}{3}$;

i) $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| < 47$; j) $\left|\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}\right| > 2$;

k) $\frac{|x^2 + 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} > 1$; l) $\frac{2x+1}{2x^2 + 3x - 2} < 2$; m) $\left|\frac{3x-1}{x^2 - 7x + 12}\right| < 1$.

22. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} 7x^2 + 13x > 2, \\ -5x^2 + 6x - 1 < 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 1 \le 0, \\ 3x^2 - 7x + 2 \le 0, \\ -x^2 + 2x - 5 < 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} |3x^2 - 8x + 4| + x - 1 < 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x-1) \ge 4(x+1), \\ x^2 + 4x > 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{|x-3|+|3-x|}{16-x^2} \le 1, \\ \dfrac{|x-3|+|3-x|}{16-x^2} \ge -1. \end{cases}$

23. Să se determine m astfel încât:

$$x^2+y^2-4x-4y+m>0,\ (\forall)\,x,y\in \mathbf{R}.$$

24. Să se determine m astfel încât:

$$x^2+y^2-2x-y+m>0,\ (\forall)\,x,y\in \mathbf{R}.$$

25. Să se rezolve inecuaţia $5x^2-20x+26 \ge \dfrac{4}{x^2-4x+5}$.

26. Fie funcţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=x^2-2x$. Să se calculeze:

a) $f([0, 2])$; b) $f([-2, 4])$; c) $f([1, 6])$; d) $f([-10, 0])$ (a se vedea ex. 29, cap. III).

27. Fie funcţia de gradul al doilea $f(x)=x^2-4x+3$. Să se calculeze:

a) $f([-4, 0])$; b) $f([1, 6])$; c) $f([3, 5])$;
d) $f([3, +\infty))$; e) $f((-\infty, -1])$; f) $f((-\infty, 3])$.

28. Să se determine $\operatorname{Im} f$ (a se vedea ex. 29, cap. III) pentru următoarele funcţii:

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=x^2+5x-6$; b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=x^2-x+1$;

c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=|x^2-4|+3$; d) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x+1}$;

e) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x+3}$;

f) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{1, 3\} \to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$,

g) $f\colon \mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{a+b}{2}\right\} \to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-ab}{2x-a-b}$, unde $a, b\in \mathbf{R}$.

29. Fie fracţia $E=\dfrac{x^2+2mx+3m-2}{x^2+2x+m}$. Să se determine m astfel încât fracţia E să aibă sens şi să fie pozitivă pentru orice $x\in \mathbf{R}$.

30. Fie fracţia $E=\dfrac{-x^2+(m+1)x-\dfrac{1}{2}}{x^2+2mx+m^2+1}$.

I) Să se arate că oricare ar fi $m\in \mathbf{R}$, fracţia E are sens oricare ar fi $x\in \mathbf{R}$.

II) Să se determine $m\in \mathbf{R}$, astfel încât E să fie negativă, oricare ar fi $x\in \mathbf{R}$.

31. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x^2-x+1}$ $(a\in\mathbf{R})$. Să se determine valorile lui a, astfel încât $\operatorname{Im} f\subset[-3,2]$.

32. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2+mx+n}{x^2+1}$. Să se determine m şi n astfel încât $\operatorname{Im} f=[-3,5]$.

33. Pentru ce valori ale lui a, între rădăcinile ecuaţiei $x^2-2(a-1)x-2a+1=0$, există relaţia $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}\geq\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$?

34. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care are coeficientul lui x^2 egal cu 1, ştiind că discriminantul şi produsul rădăcinilor sale sunt, respectiv, $\Delta=-2m^2+m+1$, $p=\dfrac{3}{4}\left(2m^2+m\right)$.

Să se determine m astfel încât rădăcinile x_1 şi x_2 să verifice inegalitatea $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}>m$.

35. Se dă ecuaţia $mx^2-2(m+1)x+8=0$ şi se cere:

a) Să se discute rădăcinile ecuaţiei după valoarea parametrului m.

b) Să se determine m astfel încât să avem $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}>x_1+x_2$, x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

36. Se dau ecuaţiile: $x^2-\left(m+1\right)x+m^2=0$ cu rădăcinile x_1 şi x_2 şi $y^2-\left(m+3\right)y+12m+11=0$ cu rădăcinile y_1 şi y_2.

Să se determine m astfel ca între rădăcinile ecuaţiilor să avem:

$$2\left(x_1+x_2\right)\left(y_1+y_2\right)\leq x_1x_2+y_1y_2.$$

37. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea:

$$\left(1+\alpha^2\right)x^2-(1+\alpha)x+\alpha(1-\alpha)=0.$$

Să se determine parametrul α pentru care are loc inegalitatea:

$$-1\le\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}\le 0.$$

38. Se dă ecuaţia $x^2-mx+m-1=0$ şi se cere:

a) pentru ce valori ale lui m o rădăcină este dublă celeilalte ?

b) pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică inegalitatea $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}>x_1x_2$?

39. Considerăm funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+6x, & x<-3,\\ -2x-5, & x\ge -3\end{cases}$ şi

$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases}5x-2, & x\le 1,\\ x^2-2x+4, & x>1.\end{cases}$

Să se determine $g\circ f$ şi $f\circ g$.

40. Considerăm funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 0,\\ -5x-1, & x>0\end{cases}$ şi

$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases}4x-2, & x<0,\\ 3x^2-2, & x\ge 0.\end{cases}$

Să se determine $g\circ f$ şi $f\circ g$.

41. Considerăm funcţiile f, g : $(0,1)\to(0,1)$ definite în modul următor:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } 0<x<\frac{1}{2},\\ x, & \text{dacă } \frac{1}{2}\le x<1;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2x, & \text{dacă } 0<x\le\frac{1}{4},\\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{4}<x<1;\end{cases}$$

Să se calculeze $g\circ f$ şi $f\circ g$.

42. Fie familia de funcţii de gradul al doilea:

$$f_m(x)=mx^2+2(m-1)x+m-1,\ m\ne 0$$

I) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe dreapta $x+y=0$.

II) Ce porţiune din această dreaptă cuprinde vârful parabolelor cu ramurile în sus (respectiv în jos) ?

43. Fie familia de funcţii de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 + 7(m-1)x + m - 1.$$

Pentru ce valori ale lui m parabolele asociate funcţiilor f_m au vârful deasupra axei Ox ?

44. Fie familia de funcţii de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-2)x + m - 2,$$

unde m este un parametru real.

I) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe o parabolă.

II) Pentru ce valori ale lui m, parabola asociată funcţiei f_m are vârful sub axa Ox ?

45. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, parabola asociată funcţiei de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 2(m-1)x - m$ taie axa Ox în două puncte distincte.

46. Fie familia de funcţii de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m, \text{ unde } m \in \mathbf{R}.$$

I) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe o parabolă.

II) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m se găsesc sub dreapta $y = \frac{5}{4}$.

47. Fie funcţia de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1, m \neq 0.$$

Să se determine m astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcţii să se găsească pe prima bisectoare.

48. Să se determine m astfel încât parabola asociată funcţiei $f(x) = x^2 - 2(m+3)x + m^2$ să taie axa Ox în două puncte.

49. Să se arate că oricare ar fi $m \neq 0$, graficul funcţiei de gradul al doilea $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + m - 6$ taie axa Ox în două puncte distincte.

50. Fie familia de funcţii de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + 1, m \in \mathrm{R}.$$

Să se arate că există două parabole asociate acestor funcţii care sunt tangente axei Ox. Să se arate apoi că aceste două parabole au vârfurile

simetrice față de origine.

51. Să se determine m astfel încât graficele funcțiilor $f(x)=x^2-2x-4$ și $g(x)=-x^2-2mx-6$ să aibă același vârf.

52. Să se arate că graficele funcțiilor $f(x)=2x^2-2x+2$ și $g(x)=x^2+2x-1$ au două puncte comune.

53. Fie funcția de gradul al doilea $f(x)=x^2-4x+3$. Să notăm cu S aria cuprinsă între axa Ox și graficul acestei funcții.

Să se arate că $1 < S < 2$.

54. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât graficele funcțiilor $f(x)=x^2+mx+1$ și $g(x)=x^2+x+m$ să se intersecteze pe axa Ox.

55. Fie p un număr prim. Să se arate că intersecția graficului funcției $f(x)=x^2-3x-p$ cu axa Ox este formată din două puncte care nu au coordonate raționale.

56. Fie funcția $f(x)=x^2-6x+5$. Notăm cu S aria cuprinsă între graficul acestei funcții și axa Ox. Să se arate că $10 < S < 16$.

57. Fie funcția de gradul al doilea $f_m(x)=x^2-(m+3)x+4m$. Pentru ce valori ale lui m graficul f_m este situat deasupra dreptei $y=-7$?

58. Fie $m \in \mathbf{Z}$. Să se determine m astfel încât vârful parabolei funcției $f(x)=mx^2-2(m+7)x+m$ să aibă coordonatele numere întregi.

59. Fie funcția de gradul al doilea:

$$f_m(x)=(m-1)x^2+2(m+2)x+m+1, (m \neq 1).$$

Să se determine m astfel încât graficul funcției f_m să fie situat sub axa Ox.

60. Considerăm funcția $f_m(x)=x^2-2(m-1)x+m(m-3)$.

I) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolei funcției f_m se află sub axa Ox ?

II) Pentru ce valori ale lui m, parabola funcției f_m este tangentă axei Ox ?

III) Să se arate că vârfurile parabolelor funcțiilor f_m, când $m \in \mathbf{R}$ se află pe o dreaptă.

61. Fie funcția $f(x)=(m+1)x^2+2(m+2)x+m+3$.

I) Să se arate că graficul acestei funcţii taie axa Ox în două puncte distincte.

II) Să se determine m astfel încât rădăcinile ecuaţiei: $(m+1)x^2+2(m+2)x+m+3=0$ să fie mai mici decât 1.

62. Pentru ce valori ale lui m, $(m-1)x^2+mx+m+1>0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

63. Pentru ce valori ale lui m, $(m-1)x^2+2mx+m+1>0$, oricare ar fi $x>0$?

64. Pentru ce valori ale lui m, $x^2-2mx+m+1>0$, $(\forall)\, x>0$?

65. Pentru ce valori ale lui m, $(m-1)x^2+2mx+1>0$, $(\forall)\, x>0$?

66. Pentru ce valori ale lui m, $(m+1)x^2+2mx+1<0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$?

67. Pentru ce valori ale lui m, $(m-2)x^2+2(2m-3)x+m-2>0$, oricare ar fi $x<0$?

68. Pentru ce valori ale lui m, $(m-2)x^2+2(2m-3)x+m-2<0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

69. Pentru ce valori ale lui m, inecuaţia:

$$(m-1)x^2+(m+1)x+m+1>0,$$

nu are nici o soluţie?

70. Fie funcţia $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f_m(x)=\begin{cases} -x^2+mx+1, & \text{dacă } x \le 0, \\ x+1, & \text{dacă } x>0, \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Să se determine valorile lui m pentru care funcţia f_m este surjectivă, injectivă, respectiv inversabilă. În cazul în care f_m este inversabilă, să se determine inversa funcţiei f_m.

71. Să se determine numerele m şi n astfel încât mulţimea:

$$\{\, x \in \mathbf{R} \mid mx^2-(3m-4)x-6(m-1)=0 \,\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid (n-1)x^2 - -(n-1)x+6(n-2)=0\}$$

să aibă două elemente.

72. Să se determine numerele m şi n astfel încât mulţimea:

$$\{\, x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2-(3m-7)x-6(m-2)=0 \,\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid nx^2 +$$

$$+nx+3(2n-2)=0\}$$

să aibă două elemente.

73. Să se determine m astfel încât:

$$\{x\in\mathbf{R}\mid 3x^2+mx-22=0\}\cap\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-(m+4)x+14=0\}\neq\varnothing.$$

74. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$$\{x\in\mathbf{R}\mid (3m+1)x^2+(3m+2)x+2m+5=0\}\cup\{x\in\mathbf{R}\mid (2m+5)x^2+$$
$$+(3m+2)x+3m+1=0\}$$

să aibă trei elemente.

75. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+mx-4=0\}\cup\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+2x-2m=0\}$$

să aibă exact două elemente.

76. Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât ecuaţia:

$$x|x+2a|+1-a=0$$

să aibă o unică soluţie.

77. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât:

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+mx+1=0\}\cap[1,+\infty)\neq\varnothing.$$

78. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât mulţimea:

$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+mx+2=0\}\cap[1,+\infty)$ să aibă două elemente.

79. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât:

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+mx+1=0\}\cap[1,+\infty)=\varnothing.$$

80. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât mulţimea

$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+mx+2=0\}\cap(-\infty,-1]$ să aibă două elemente.

81. Să se determine m astfel încât

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2mx+m-1=0\}\cap(-\infty,-1]\neq\varnothing.$$

82. Să se determine m astfel încât:

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2mx+m-1=0\}\cap(-\infty,-1]=\varnothing.$$

83. Fie $a,b\in\mathbf{R}, 0<a<b$. Dacă $b<m<\dfrac{a^2+b^2}{2a}$, atunci mulţimea

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2m(m-a)x + m^2(m^2 - b^2) = 0\right\} \cap [0, +\infty)$$

are două elemente.

84. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)x + b^2c^2 = 0\right\} \neq \varnothing.$$

85. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât mulţimea

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0\right\} \cap [2, +\infty)$$

să aibă un singur element.

86. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m^2 - 1)x^2 - (2m-1)x + 1 = 0\right\} \cap (-\infty, 1]$$

să aibă un singur element.

87. Să se determine m astfel încât:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0\right\} \cap [-1, 1] \neq \varnothing.$$

88. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m+2)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0\right\} \cap [-1, 1]$$

să aibă două elemente.

89. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0\right\} \cap [-1, 1]$$

să aibă un singur element.

90. Să se determine m astfel încât:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m+1)x^2 - 2(m-1)x - m = 0\right\} \cap [0, 1] = \varnothing.$$

91. Fie numerele reale a, b, c, a', b', c' astfel încât $a \neq 0, a' \neq 0$ şi $ac + a'c' \geq 0$.

Dacă $\left\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} \neq \varnothing$ şi $\left\{x \in \mathbf{R} \mid a'x^2 + b'x + c' = 0\right\} \neq \varnothing$

atunci $\left\{x \in \mathbf{R} \mid aa'x^2 + bb'x + cc' = 0\right\} \neq \varnothing$.

92. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\right\} \cap (-\infty, 1]$ să aibă două elemente.

93. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0\} \cap (0, 3)$ să aibă două elemente.

94. Să se determine m astfel încât:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap [0, 1] = \varnothing .$$

95. Să se determine m astfel încât mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m + 5 = 0\} \cap [5, 7] \neq \varnothing .$$

96. Pentru ce valori ale lui m, funcţia de gradul al doilea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5m^2x^2 - (5m+1)x + 1$, are semn constant pe intervalul (-1, 1) ?

97. Fie polinomul $P(x) = x^2 + bx + c$, cu $b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

I) Dacă rădăcinile polinomului sunt reale, atunci $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, dacă şi numai dacă $1 + b + c > 0$, $1 - b + c > 0$ şi $|c| < 1$.

II) Dacă rădăcinile polinomului nu sunt reale, atunci $|x_1| < 1$ şi $|x_2| < 1$, dacă şi numai dacă $|c| < 1$.

98. Dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + y + z = 2$, $xy + yz + zx = 1$, să se arate că $x, y, z \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

99. Să se determine toate mulţimile finite $A \subset \mathbf{R}$ care au proprietatea că oricare ar fi $x \in A$, atunci $x^2 - |x| + 1 \in A$.

100. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^5 - y^5 = 31 \end{cases}$$

101. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = x + 2y; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x^2 + 2y^2 - xy = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x^2 + xy + y = -1. \end{cases}$

102. Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 7y^2 = 15, \\ -x^2 + 3xy = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 2y^2 = -1, \\ x^2 + 5y^2 = 21; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -5, \\ xy = 12; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 118, \\ x^2 - xy - y^2 = -41; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 = p, \\ x^2y + xy^2 + y^3 = q; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$

h) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{16}; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x + z = -2, \\ xy + xz + yz = 2; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27; \end{cases}$ k) $\begin{cases} xy + xz = -8, \\ xy + yz = 1, \\ yz + xz = -3. \end{cases}$

103. Să se arate că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a, \\ x_3 - x_4 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbf{R})$$

are o soluţie pozitivă dacă şi numai dacă $|a| + |b| < 1$.

104. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 = a + (y - z)^2, \\ y^2 = b + (z - x)^2, \\ z^2 = c + (x - y)^2. \end{cases} \qquad (abc > 0).$$

105. Pentru ce valori ale lui a, sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a, \end{cases}$ are o unică soluţie reală ?

106. Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

107. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui a sistemul are două soluţii ?

108. Fie sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ (x+a)^2+y^2=1. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui a sistemul are două, respectiv trei, soluţii ?

109. Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, următoarele sisteme simetrice:

a) $\begin{cases} 2x+xy+2y=59, \\ 3x-2xy+3y=-34; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+2xy=-11, \\ 2x^2y+2xy^2=-12; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{133}{1000}, \\ x+y=\dfrac{7}{10}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy+5(x+y)=55, \\ 6xy+3(x+y)=81; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^3-y^3=3(x-y), \\ x^3+y^3=x+y; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=3, \\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2}; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^4+y^4=2; \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3, \\ (x+y)(x^2+y^2)=15; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+xz+yz=0, \\ xyz=0. \end{cases}$

110. Să se determine toate soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0, \\ 3x^2-2xy-1=0, \end{cases}$$

care îndeplinesc condiţia $xy>0$.

111. Să se determine toate soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z)=3-z, \\ y^3+3y^2=x^2-3x+2, \\ z^2+y^2=6z, \end{cases}$$

care îndeplinesc condiţia $z \le 3$.

112. Să se determine valorile lui a real, astfel încât sistemul de

inecuaţii:

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \ge \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \le -2, \end{cases}$$

să aibă soluţie.

113. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x^3y^3z^4 = 1, \\ x^2y^4z^4 = 2, \\ x^2y^3z^5 = 3. \end{cases}$

114. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n}, \\ x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p = b^p. \end{cases}$

115. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} |2x+y| = 3, \\ \left|\dfrac{4x-1}{2x+y}\right| + \left|\dfrac{2x+y}{3x-2}\right| = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-2|+|y-1| = 1, \\ |x^2-3x+2|+4y = 6. \end{cases}$

116. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_8 - x_9 + x_{10} = 1, \\ x_9 - x_{10} + x_1 = 1, \\ x_{10} - x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

117. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x_2x_3\ldots x_n}{x_1} = a_1, \\ \dfrac{x_1x_3\ldots x_n}{x_2} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n. \end{cases}$

118. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât:

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

119. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ numere reale pozitive. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a_1, \\ x_2 x_3 = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} x_n = a_{n-1}, \\ x_n x_1 = a_n. \end{cases}$$

120. Pe o dreaptă (Δ) se consideră $\|AB\| = a$, iar pe segmentul $|AB|$ se ia punctul M. Triunghiurile echilaterale având date bazele $|AM|$ şi $|MB|$, să se găsească minimul ariei sumei celor două triunghiuri.

121. Fie AD mediana unui triunghi oarecare ABC. Să se determine $M \in |AD|$ astfel încât $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$ să fie minimă.

122. Se dau două surse de lumină A şi B de intensitate, respectiv, 100 A şi 81 A. Să se determine pe dreapta AB un punct M egal luminat de ambele surse. Distanţa dintre A şi B este egală cu 20 m.

123. Se dă un cerc de rază $R = 10$ m. Pe un diametru $|AB|$ al cercului se alege un punct M şi se construiesc cercurile de diametre $|AM|$ şi $|MB|$. Să se determine poziţia punctului M astfel ca aria cuprinsă între cele două cercuri să fie maximă.

124. Să se determine pe un segment $|AB|$ de 20 cm un punct M astfel ca suma ariilor cercurilor construite pe $|AM|$ şi $|BM|$ ca diametre să fie minimă.

125. Să se împrejmuiască un loc în formă de dreptunghi cu un gard a cărui lungime este de 120 m. Cât trebuie să fie laturile acestui dreptunghi astfel încât aria locului să fie maximă ?

126. Din bucăţi de materiale triunghiulare, o croitoreasă vrea să coasă feţe de masă dreptunghiulare. Cum trebuie croite feţele de masă astfel încât să se piardă cât mai puţin material ?

127. Aria unui dreptunghi este egală cu 81 dm^2. Să se afle dimensiunile sale astfel încât perimetrul să fie minim.

128. Două maşini pot transporta o cantitate de materiale timp de 5 zile. Prima maşină merge 200 km pe zi şi consumă 12 litri la suta de kilometri. A doua maşină merge 300 km pe zi şi consumă 18 litri la suta de kilometri. Câte zile trebuie să transporte materiale fiecare maşină astfel încât cantitatea de benzină să fie minimă ?

129. Fie triunghiul ABC în care se cunoaşte $\|AB\| = 5\,\text{cm}$, iar suma $\|BC\|$ şi $\|AC\|$ este egală cu 7 cm. Să se afle înălţimea triunghiului astfel ca aria să fie maximă.

130. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu acelaşi perimetru, să se găsească acelea care au raza cercului înscris maximă.

131. Să se determine $x, y, z \in \mathbf{R}$, astfel încât:

$$\begin{cases} 2x = y + \dfrac{2}{y}, \\ 2y = z + \dfrac{2}{z}, \\ 2z = x + \dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

132. Să se determine numerele reale x, y, z care satisfac egalităţile:

$$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)^2 = z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{xyz}.$$

133. Să se determine toate soluţiile reale ale sistemelor de ecuaţii:

a) $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0, \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0, \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$

Capitolul VI
PUTERI ŞI RADICALI

1. Să se calculeze:

a) $\left[7 - 5\left(\frac{6}{13}\right)^0\right]^{-1}$; b) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-2}$;

c) $\dfrac{3^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^{0}-18\cdot 3^{-3}}$; d) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}}$.

2. Să se efectueze:

a) $\dfrac{4x^{-2}-9y^{-2}}{a-b}\cdot\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{2x^{-1}+3y^{-1}}$; b) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{x^{-1}+y^{-1}}\cdot\dfrac{x+y}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{-3}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{-2}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{2}$; d) $[-(1-a)^{-1}]^{-1}\left[\dfrac{a(a-2)+a^{0}}{a^{2}-a+1}\right]^{-1}$;

e) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}\left(a^{2}-2ab+b^{2}\right)^{-2}$.

3. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-a^{-1}}{4-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-2}}:\left[\dfrac{1}{2^{-2}(2+a)}-2a^{-1}-1\right]$ şi să i se afle valoarea pentru $a=-\dfrac{1}{3}$;

b) $\left\{a+\left[1+\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$ şi să i se afle valoarea pentru $a=-\dfrac{1}{4}$.

4. Să se efectueze:

$(x+y+z)^{5}-(-x+y+z)^{5}-(x-y+z)^{5}-(x+y-z)^{5}$, unde x, y, z sunt numere reale.

5. Dacă $a, b\in \mathbf{R}$, să se demonstreze că:

$$(a+b)^{5}-a^{5}-b^{5}=5ab(a+b)\left(a^{2}+ab+b^{2}\right).$$

6. Dacă $a, b\in\mathbf{R}$, cu $a+b\neq 0$, să se demonstreze că:

$$a^{3}-b^{3}=\left(a\frac{a^{3}-2b^{3}}{a^{3}+b^{3}}\right)^{3}+\left(b\frac{2a^{3}-b^{3}}{a^{3}+b^{3}}\right)^{3}.$$

7. I) Dacă $a, b, c, d\in\mathbf{R}$, să se demonstreze că:

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}+d^{3}-3(bcd+cda+dab+abc)=$$

$$=(a+b+c+d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd\right).$$

II) *Generalizare*. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - 3\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} a_i a_j a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_i a_j \right).$$

8. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ şi notăm $\alpha = a+b+c+d$, $\beta = a+b-c-d$, $\gamma = a-b+c-d$, $\delta = a-b-c+d$. Să se calculeze:

$$\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)-\gamma\delta\left(\gamma^2+\delta^2\right).$$

9. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a+b+c+d=0$, atunci:

$$\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2 = 9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

10. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0 \text{ şi } a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3+a_6^3=0.$$

Să se arate că:

$$(a_1+a_3)(a_1+a_4)(a_1+a_5)(a_1+a_6)=(a_2+a_3)(a_2+a_4)(a_2+a_5)(a_2+a_6).$$

11. Să se afle care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\left(-\frac{1}{8}\right)^4$ sau $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; b) $\left(-\frac{6}{7}\right)^4$ sau $\left(\frac{36}{49}\right)^6$;

c) $81^{150}\cdot 8^{200}$ sau $3^{600}\cdot 16^{75}$; d) 3^{65} sau $\left(\frac{1}{3}\right)^{-65}$;

e) $81^{-75}\cdot 8^{200}$ sau $3^{-600}\cdot 4^{150}$;

12. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = 3x^2$; b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_2(x) = x^3 - 2$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_3(x) = (x-2)^2$; d) $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_4(x) = (x+1)^4$;

e) $f_5 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_5(x) = |x+1|^3$; f) $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_6(x) = |x+2|^3$.

13. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei putere $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^n$.

14. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}, f_1(x) = x^{-2}+1$;

b) $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, f_2(x) = x^{-3} + 1$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}, f_3(x) = \dfrac{1}{x-1}$;

d) $f_4 : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, f_4(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

15. Să se aducă la o formă mai simplă:

a) $\sqrt{(2+x)^2}$; b) $\sqrt[4]{(|x|-3)^4}$;

c) $\sqrt{(-2x^2+3x-1)^2}$; d) $\sqrt[4]{(|x|^2-3x+2)^4}$.

16. Să se efectueze sumele:

a) $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$; b) $\sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$;

c) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2} + \sqrt{(x^2+x+2)^2}$.

17. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$;

b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_2(x) = \sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_3(x) = \sqrt{(2x^2-3x+1)^2} + \sqrt{(x^2+x+2)^2}$.

18. Să se găsească valorile lui x pentru care sunt definiţi radicalii sau sumele de radicali:

a) $\sqrt{x-1}$; b) $\sqrt[6]{1-4x}$; c) $\sqrt{-5-3x}$; d) $\sqrt[3]{7x-2}$;

e) $\sqrt[3]{x^2-5x+4}$; f) $\sqrt{(x^2-3x+2)^2}$; g) $\sqrt[4]{x^2-5x+4}$;

h) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-x^5)x^8}$; i) $\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$; j) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x-5}$;

k) $\sqrt[5]{7x^2-3} + \sqrt[6]{x^2-2}$; l) $\sqrt{4+x} - \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{15-x}$;

m) $3\sqrt[3]{1+x} + \sqrt{|x+2|-7}$.

19. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $3\sqrt{2}$ sau $\sqrt{27}$; b) $3\sqrt[4]{m^3}$ sau $\sqrt[4]{162m^3}$ $(m > 0)$;

c) $2a\sqrt{a}$ sau $\sqrt{4a^3}$ $(a>0)$;

d) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$ sau $\sqrt{\frac{3}{2}}$;

e) $\sqrt{\frac{4}{75}}$ sau $3\sqrt{\frac{25}{243}}$;

f) $-3\sqrt[3]{54}$ sau $-2\sqrt[3]{128}$;

g) $2\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$ sau $\sqrt[3]{\frac{8}{375}}$.

20. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

a) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt{8}, \sqrt[4]{54}, \sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[12]{75}$.

21. Să se determine semnul fiecăruia dintre numerele:

$\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[5]{4}-\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{31}-\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{63}-2\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{m}-\sqrt[3]{n}$,

m şi n fiind numerele reale pozitive.

22. Să se determine care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ sau $\sqrt{19}-\sqrt{11}$; b) $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ sau $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}$.

23. Să se calculeze:

a) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}\right)$;

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

24. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}$.

25. Să se scrie numărul $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$ sub forma $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$, cu a şi b numere raţionale.

26. Fără a utiliza formula radicalilor compuşi să se transforme radicalul $\sqrt{9+\sqrt{56}}$ într-o sumă de doi radicali.

27. Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât $a+b+c=1$, atunci:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le 5.$$

28. Să se simplifice:

a) $\dfrac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}+2}$;

b) $\dfrac{x^3-12x+\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-16}+16}{x^3-12x+\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-16}-16}$;

c) $\dfrac{x^2+2x+2x\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}}{x^2-x+x\sqrt{y}-\sqrt{y}}$ $(x, y\in \mathbf{R})$. Discuţie.

29. Să se demonstreze că, dacă $a>b>0$ sunt numere reale şi $m\in\mathbf{N}$, atunci:

$$ma^{m-1}>\frac{a^m-b^m}{a-b}>mb^{m-1}.$$

Să se deducă de aici că:

$\sqrt[n]{n+1}>\sqrt[n+1]{n+2}$, $n\geq 2$ fiind un număr natural.

30. Utilizând formula radicalilor compuşi să se aducă la o formă mai simplă radicalii:

a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; b) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$; c) $\sqrt{28-16\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; e) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

f) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

31. Să se arate că:

$$\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+$$
$$+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}\in\mathbf{Q}.$$

32. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

d) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

33. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$.

34. Să se arate că:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

este număr întreg.

35. Să se demonstreze că:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

36. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^3}+\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^3}}{\sqrt{\left(6+\sqrt{35}\right)^3}-\sqrt{\left(6-\sqrt{35}\right)^3}}\in \mathbf{Q}$$

37. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$;

b) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3$;

c) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1$.

38. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[n]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt{20}.$$

39. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$;

c) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; d) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

40. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{3}}$; g) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$; h) $\dfrac{1}{9\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}-27}$.

41. Să se raţionalizeze numitorul fracţiei:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}},$$

a, b, c fiind numere raţionale.

42. Să se raţionalizeze numitorul fracţiei:

$$\frac{1}{a+b\sqrt[3]{k}+c\sqrt[3]{k^2}},$$

unde a, b, c, k sunt numere întregi.

43. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

I) $\dfrac{1}{a-\sqrt[n]{b}}$; II) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$, a fiind un număr întreg.

44. Să se calculeze:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}},$$

unde $x \in (1,2)$.

45. Fie $f_1(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$,

$f_2(x)=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$,

unde $x \geq \dfrac{1}{2}$.

a) Să se simplifice $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$;

b) Să se rezolve ecuaţia $f_1(x)+f_2(x)=2\sqrt{2}$.

46. Să se arate că ecuaţia:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}=\sqrt[3]{x^2+7}-2$$

are unica soluţie $x=-1$.

47. Să se găsească soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

b) $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=5$;

c) $\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}=4$.

48. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+9}+x+8=0$; b) $\sqrt{24-10x}=3-4x$;

c) $1-\sqrt{13+3x^2}=2x$; d) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}}=x-1$;

e) $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$;

f) $\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}}=2x-1$; g) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{4}$.

49. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x},$$

a fiind un număr real.

50. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x,$$

unde $a \in \mathbf{R}$. Discuţie.

51. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$; b) $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$;

c) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-8x+7}=0$.

52. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x^2-a}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

unde $a \in \mathbf{R}$.

53. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{4x+c},$$

a, b, c fiind numere reale.

54. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-6+2\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+16}$;

c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-9+4\sqrt{6}}$.

55. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\sqrt{x+8a}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+8a+4},$$

a fiind un număr real.

56. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=c,$$

a, b, c fiind numere reale.

57. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$; b) $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-13}=\sqrt{11+\sqrt{72}}$.

58. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{a'x+b'}=\sqrt{ax+c}+\sqrt{a'x+c'},$$

unde a, a', b, b', c, c' sunt numere reale, astfel încât $b+b'=c+c'$.

59. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=a\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}, \text{ unde } a\in \mathbf{R}.$$

60. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b},$$

unde a şi b sunt numere reale, iar n este un număr natural. Discuţie.

61. I) Să se demonstreze că orice soluţie a ecuaţiei:

$$\sqrt[3]{E(x)}+\sqrt[3]{F(x)}=\sqrt[3]{G(x)} \qquad (1)$$

este o soluţie a ecuaţiei:

$$\left(E(x)+F(x)-G(x)\right)^3+27\,E(x)F(x)G(x)=0. \qquad (2)$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluţie a ecuaţiei (2) este o soluţie a ecuatiei (1), mai puţin aceea care dă pentru $E(x)$, $F(x)$, $-G(x)$ valori numerice egale.

62. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{b},$$

unde a, b sunt numere reale. Discuţie.

63. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+b}+\sqrt[3]{x+c}=0,$$

unde a, b, c sunt numere reale. Discuţie.

64. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}+3$;

b) $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(4-x)^2}=\sqrt[3]{(x-2)(4-x)}+1$;

c) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{3x+2}=0$;

d) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

65. I) Să se demonstreze că orice soluţie a ecuaţiei:

$$E(x)+F(x)\sqrt[3]{H(x)}+G(x)\sqrt[3]{\left(H(x)\right)^2}=0 \qquad (1)$$

este soluţie a ecuaţiei:

$$\left(E(x)\right)^3+\left(F(x)\right)^3H(x)+\left(G(x)\right)^3\left(H(x)\right)^2-3E(x)F(x)G(x)H(x)=0. \qquad (2)$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluţie a ecuaţiei (2) este o soluţie a ecuaţiei (1), mai puţin aceea care dă pentru $E(x)$, $F(x)\sqrt[3]{H(x)}$, $G(x)\sqrt[3]{\left(H(x)\right)^2}$ valori numerice egale.

66. Să se rezolve ecuaţia:

$$3x+1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=0.$$

67. I) Fie a, b, c numere reale nenule şi notăm:

$$\alpha=ab+ac-bc,\quad \beta=bc+ba-ca,\quad \gamma=ca+cb-ab.$$

Să se arate că sunt echivalente următoarele două propoziţii:

1) $abc>0$ şi α,β,γ sunt de acelaşi semn;

2) $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0$.

II) Cu notaţiile de mai înainte, să se rezolve ecuaţia:

$$x=\sqrt{b-x}\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\sqrt{a-x}+\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}.$$

Să se arate că pentru ca ecuaţia să aibă soluţie diferită de a, b, c este necesar şi suficient să fie îndeplinită una din condiţiile echivalente precedente.

68. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}},$$

a fiind un număr real, $0<a<\frac{1}{4}$.

69. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x}+3}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}=4$; b) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$;

c) $\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x-4}=2$; d) $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+18}}{\sqrt[3]{x+18}-\sqrt[3]{x-1}}=5$.

70. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$;

b) $(x-2)^2+4(x-2)+\sqrt{x}(4-\sqrt{x})=0$;

c) $(x-4)^2+4x-27=2\sqrt{x^2-4x+4}$.

71. Să se rezolve ecuaţia:

$$3\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}}=10\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}.$$

72. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x^2-2x+1}=x^2-3$; b) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2}$;

c) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{x^2-6x+9}$;

d) $\sqrt{x^4-18x^2+81}-2\sqrt{x^4-2x^2+1}+\sqrt{x^2}+x+7=0$.

73. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}+d=0,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ şi $d>0$.

74. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$;

c) $\dfrac{x-8}{\sqrt{3x-4}}=\sqrt{2x-5}-\sqrt{x+3}$;

d) $\sqrt{2x+4}-\sqrt{8-4x}=\dfrac{12x-8}{\sqrt{6x+20}}$;

e) $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{2x+6}-\frac{9}{4}}=x+1$.

75. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia:

$$\sqrt{2|x|-2x}=5m-x$$

să aibă trei rădăcini reale.

76. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{x^2-7x}+\sqrt{x-5}+\sqrt[4]{4-x}=7$;

b) $\sqrt{x-6}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[4]{6-x}=2$.

77. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$; b) $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{4-x}=2$;

c) $\sqrt[4]{x-9}-\sqrt[3]{x+2}=-1$; d) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1$.

78. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{x-6}-(x-6)\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{39-x}-\sqrt[5]{x-6}}=30.$$

79. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[5]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[5]{x-\sqrt{x^2-1}}=2$;

b) $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}$;

c) $\sqrt[7]{1+\frac{x}{a}}+\sqrt[7]{\frac{a+x}{b}}=\sqrt[7]{\frac{x}{ab}}$;

d) $\frac{2x+1}{2x-1}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{2x-1}}+\frac{2x-1}{2x+1}\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}+1=0$;

e) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{b}$; f) $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$,

a, b, c fiind numere reale.

80. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}$;

b) $\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x+x^2)^2}=\sqrt[n]{1+x^3}$;

c) $\sqrt[m]{(x+a)^2}+2\sqrt[m]{(a-x)^2}=3\sqrt[m]{a^2-x^2}$;

d) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-2\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{1-x}$;

e) $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{x^2}}$;

f) $\sqrt[n]{1+\sqrt[p]{x}}-2\sqrt[n]{1-\sqrt[p]{x}}=\sqrt[2n]{1-\sqrt[p]{x^2}}$.

81. Să se rezolve inecuaţia:

$$\sqrt{x^2-a^2} > x-\sqrt{2ax-a^2},$$

a fiind un număr real.

82. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14$; b) $2\sqrt{x(x+7)} < 29-2x$;

c) $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$; d) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6} > x-2$.

83. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8} > 3$; b) $\sqrt{x^2+3x+2} < 1+\sqrt{x^2-x+1}$;

c) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$; d) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

84. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{x-1}+x-3 \geq \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$;

b) $\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x+1}{4} < \sqrt{2x-1+\dfrac{(x+1)^2}{8}}$;

c) $\sqrt{x+7}-1 < \sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$;

d) $\dfrac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1$; e) $\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2} > 1$ (pentru $x \geq 2$);

f) $\sqrt{(x+4)(x-3)} < 6x-3$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$.

85. Să se calculeze:

a) $\dfrac{2^{1/2}+2\cdot 5^{-1}}{2^{-1/3}-2^{-1/6}5^{-2/3}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$;

b) $\dfrac{2^{7/3}-2^{8/3}\cdot 2^{2/3}+2\sqrt[3]{3^4}}{2^{5/3}-\sqrt[3]{48}-2\cdot 3^{2/3}+3\cdot 2^{2/3}}:\sqrt[3]{2}$.

86. Să se efectueze:

I) $\dfrac{2b^{1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}}+(a-b)^{-1}\left[\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a^{1/2}+b^{1/2}}-\sqrt{ab}\right]$, pentru $a, b > 0$,

II) $\left\{\left(1-a^2\right)\left[\frac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}}+a^{1/2}\right]\left[\frac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+1\right\}:\sqrt{\left(1-2a+a^2\right)^{-1}}$,

pentru $a>1$;

III) $\left(\frac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}}+\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right):\sqrt[3]{a}$, pentru $a,b>0$,

numere reale.

87. Să se efectueze:

I) $\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive; aceeaşi problemă, dacă a, b, c, d, cu $d\geq 0$, sunt numere reale oarecare;

II) $\frac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}:\left(\frac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}\right)$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive.

88. Să se calculeze:

I) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\left(a^2-ab\right)^{2/3}}:\frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a^2}\left(a^{3/2}+b^{3/2}\right)}$, pentru $a=\frac{6}{5}, b=\frac{3}{5}$;

II) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1-\sqrt[16]{a}\right)$, pentru $a=2$;

III) $\left[\frac{\left(1-x^2\right)^{-1/2}+1}{\left(1-x^2\right)^{-1/2}-1}\right]^{-1/2}+\left[\frac{\left(1-x^2\right)^{-1/2}-1}{\left(1-x^2\right)^{-1/2}+1}\right]^{-1/2}$

pentru $x=2a^{1/2}(1+a)^{-1}, a>1$;

IV) $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, pentru $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, unde $a,b>0$.

Aceeaşi problemă pentru cazul în care $a,b<0$.

89. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă şi adaos, cu eroarea indicată, pentru numerele:

a) $\sqrt[3]{72351}$ cu o eroare mai mică decât 1;

b) $\sqrt{2,5}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-1};

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3}.

90. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1};$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

91. Dacă $s=\dfrac{1}{\sqrt{10000}}+\dfrac{1}{\sqrt{10001}}+\dfrac{1}{\sqrt{10002}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{1000000}}$, să se arate că $|s-1800|<0,02$.

92. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că:

$$\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right];$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}.$$

93. Să se determine toate valorile posibile ale expresiei:

$$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1},$$

pentru $a\in\mathbf{R}$.

94. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=1,\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y},\\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt[3]{x-y+8};\end{cases}$

c) $\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}\right)^{-1/2}+\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}\right)^{-1/2}=2,\\ xy=1;\end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4}, \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ x^2-4xy+6x=8; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=5, \\ x+20y=23. \end{cases}$

Capitolul VII
NUMERE COMPLEXE

1. Să se găsească numerele reale x şi y dacă:

a) $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$; b) $(2+i)x-(2-i)y=x-y+2i$;

c) $(4-3i)x^2+(3+2i)xy=4y^2-\dfrac{1}{2}x^2+(3xy-2y^2)i$; d) $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i$;

e) $3\sqrt{x^2-2y}+(1-i)x^2=2(1+2i)y+4-19i$;

f) $(x-a)(x+a-2+2i)+(y-b)(y+b-i)=0$.

2. Să se calculeze:

a) $(2-i)^2$; $(2+i)^2$; $(2-i)^3$; $(2+i)^3$; b) $(2-4i)(5+2i)$; $(4+5i)(1-2i)$; $(3-\sqrt{2}\,i)^2(3+\sqrt{2}\,i)$; c) $\dfrac{i-6}{2+5i}$; $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{1+i}$; $\dfrac{i-6}{2+5i}+\dfrac{2-i}{2+i}$; $\dfrac{3+7i}{2+3i}+\dfrac{5-8i}{2-3i}$; d) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}+\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$; $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{32}$.

3. Să se arate că $1+3i$ şi $1-3i$ sunt soluţii ale ecuaţiei:

$$x^3-x^2+8x+10=0.$$

4. Să se arate că numerele complexe $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $x^4+x^2+1=0$.

5. Dacă ε este oricare dintre numerele $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, să se

calculeze:

a) $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, ε^n, unde $n \in \mathbf{N}$; b) $\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$; $\frac{\varepsilon^3-1}{1-\varepsilon^2}$;

c) $(a + b)(a + b\varepsilon)(a + b\varepsilon^2)$; $(a\varepsilon + b\varepsilon^2)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

d) $(a + b + c)(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon)$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

6. Să se verifice egalităţile:

a) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$; b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5 =$ $= -1$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6 + \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6 = -2$.

7. Fie numerele complexe

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \text{ şi } z_2 = \frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}$$

Să se calculeze: $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1^2 + z_2^2$, $z_1^3 + z_2^3$, $z_1^4 + z_2^4$, $z_2^5 z_1^{-3}$.

8. Să se determine numerele complexe z, astfel încât numărul $(z - 1)(z + i)$ să fie real.

9. Să se aducă la forma algebrică simplă, numerele:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; b) $\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2 - \left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^2$; c) $\frac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$.

10. Să se calculeze:

a) $(1 + i)^{200}$; b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$; c) $\left(\frac{5-17i}{11-6i}\right)^n + \left(\frac{5+13i}{9+4i}\right)^n$;

d) $\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. Dacă α, β sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze:

a) $\alpha^{1980} + \beta^{1980}$; b) $\alpha^{1981} + \beta^{1981}$; c) $\alpha^{1982} + \beta^{1982}$; d) $(1 + \alpha)^{1980} + (1 + \beta)^{1980}$.

12. Dacă α, β sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze:

a) $\alpha^n + \beta^n$; b) $(1 + \alpha)^n + (1 + \alpha^2)^n + (\alpha + \alpha^2)^n$; c) $(1 + \beta)^n + (1 + \beta^2)^n + (\beta + \beta^2)^n$, unde n este un număr natural.

13. Să se calculeze:

$s_1 = \sum_{k=0}^{n} i^k$, $s_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k i^k$, unde n este un număr natural.

14. Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, avem

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n \in \mathbf{R}.$$

15. Să se calculeze $|z|$ dacă $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4$.

16. Să se determine, în fiecare caz în parte, numărul complex z astfel încât:

a) $\left|\frac{z-12}{zi+8}\right| = \frac{5}{3}$ şi $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$; b) $|z| = |1 - z| = |z^2|$;

c) $|z - i| = |z - 1| = |z + iz|$.

17. Fie $z, z' \in \mathbf{C}$ astfel încât $|z| = |z'| = 1$. Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbf{R}$.

18. Fie $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se arate că modulul numărului $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ este 1. Reciproc, sa se arate că orice număr complex diferit de -1, de modul 1, poate fi scris în mod unic sub forma precedentă.

19. Să se reprezinte în planul complex numerele:

a) $z_1 = (z + 3i)(3 - 5i)$; b) $z_2 = \frac{3+2i}{1+3i}$.

20. Să se determine punctele din planul complex, care au ca afix numerele complexe z, pentru care:

a) $|z + i| \leq 2$; b) $|z - 2i| > 3$; c) $|z| \leq 2$; d) $1 < |2z + 3 - 2i| < 3$;

e) $|i - z| > 4$; f) $|z - 2| - |z + 2| < 2$; g) $|z + 1| < |1 - z|$.

21. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^3 - 1 = 0$; b) $x^3 + 8 = 0$; c) $64x^3 + 1 = 0$; d) $64x^3 - 27 = 0$;
e) $x^4 + 16 = 0$; f) $x^4 - 81 = 0$; g) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$; h) $x^6 - 27x^3 + 27 = 0$.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{C}$, are loc egalitatea:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Să se dea o interpretare în planul complex acestei relaţii.

23. Fie $z, z' \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Mai mult, să se arate că are loc egalitatea dacă şi numai dacă există un număr real pozitiv λ astfel încât $z' = \lambda z$.

24. Să se arate că dacă $z \in \mathbf{C}$, cu $|z| < \frac{1}{3}$, atunci

$$\left|\left(\sqrt{2} - i\right)z^3 - iz\right| < \frac{3}{4}.$$

25. a) Fie $m \in \mathbf{Q}$. Să se arate că dacă $z = (4m^2 - 1) + 4mi$ atunci $|z| \in \mathbf{Q}$.
b) Să se determine toate numerele complexe $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, al căror modul să fie număr întreg.

26. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că numărul:
$z = \left(\sqrt[4]{a} + \mathrm{i}\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \mathrm{i}^2\sqrt[4]{b}\right) \ldots \left(\sqrt[4]{a} + \mathrm{i}^{4k}\sqrt[4]{b}\right)$ este real.

Dacă P este planul complex, să se determine următoarele mulţimi:

27. $A = \{(x, y) \in P \mid |z - 2\mathrm{i}| = 6$, unde $z = x + \mathrm{i}y\}$.

28. $B = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\dfrac{z-2}{z-6}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-2}{z-6}\right), \text{ unde } z = x + \mathrm{i}y\right\}$.

29. $C = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \dfrac{1+\bar{z}}{z} \in \mathbf{R}, \text{ unde } z = x + \mathrm{i}y\right\}$.

30. $D = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right) = 0, \text{ unde } z = x + \mathrm{i}y\right\}$.

31. $E = \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-2}{z-4\mathrm{i}}\right), \text{ unde } z = x + \mathrm{i}y\right\}$.

32. Să se arate că dacă ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale şi distincte, atunci ecuaţia $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ are rădăcini complexe.

33. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $(2a + 1)x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ să aibă rădăcini complexe.

34. Să se descompună în produs de polinoame de gradul întâi polinoamele: $x^4 + x$, $x^3 - 1$, $x^4 + 16$.

35. Să se determine numerele complexe z, astfel încât:
a) $|z| - 2z = 3 - 4\mathrm{i}$; b) $|z| + z = 3 + 4\mathrm{i}$.

36. Fie $u \in \mathbf{R}$, $u \neq 1$. Să se găsească condiţii în care produsul $(1 + u\mathrm{i})(1 + u\mathrm{i}^2)(1 + u\mathrm{i}^3) \ldots (1 + u\mathrm{i}^n)$, $n \in \mathbf{N}$, să fie: a) real; b) imaginar.

37. Fie numărul $\alpha = (u + \mathrm{i}v)^n + (v + \mathrm{i}u)^n$, unde $u, v \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$. Să se determine n astfel încât numărul α să fie: a) real; b) imaginar.

38. Să se găsească relaţia dintre x şi y astfel încât numărul $(x + \mathrm{i}y^2)^3$, să fie: a) real; b) imaginar.

39. Să se găsească condiţia în care numărul $(x + \mathrm{i}y)^3$ este:
a) un număr real mai mare decât 64;
b) un număr imaginar cu modulul mai mare decât 64.

40. Fie $u, v, z \in \mathbf{C}$ astfel încât $|u| < 1$ şi $|v| = 1$ şi fie $w = v\dfrac{z-u}{1-\bar{u}z}$.
Să se arate că $|w| \leq 1$ dacă şi numai dacă $|z| \leq 1$.

41. Fie $a \in \mathbf{R}_+$ şi $z \in \mathbf{C}$, astfel încât $\left|z+\frac{1}{z}\right| = a$. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

42. Să se determine numerele complexe z astfel încât

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$$

43. Să se determine mulţimea punctelor din plan, de afix z, astfel încât imaginile în plan ale numerelor z, z^2, z^3 să fie vârfurile unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în punctul de afix z^2.

44. Fie $a \in \mathbf{C}$ şi $z = \frac{a+i}{a-1+2i}$. Să se determine mulţimea punctelor A din planul complex, de afix a, astfel încât z să fie real.

45. Fie funcţia $f: \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, definită prin $f(z) = \frac{z^2-z-2}{z-1}$.

Să se determine mulţimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $f(z) \in \mathbf{R}$.

46. Fie funcţia $f: \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, definită prin $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

Să se determine:

a) Mulţimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\operatorname{Im} f(z) = 0$.

b) Mulţimea B a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

47. Să se rezolve ecuaţiile în z:

a) $2z + 6i = \frac{1}{2i}z + 5i - 7$; b) $(1 + 3i)z + \frac{1-i}{1+i} = (3 - 2i)z + 5$;

c) $\left(\sqrt{3}+i\right)z + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{21}{4}iz + 3$; d) $(5+3i)\bar{z} + \frac{2}{1-i} = \left(\varepsilon+\varepsilon^2\right)^2$,

unde $\varepsilon = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

48. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$ astfel încât $z^2 = a + bi$.

Aplicaţie, pentru numerele: $1 - i$, $1 + i$, $5 - 12i$, $5 + 12i$, $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$.

49. Să se arate că pentru ecuaţia de gradul al doilea $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, cu coeficienţi complecşi, rădăcinile sunt date de aceeaşi formulă ca şi în cazul ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali.

50. Să se rezolve ecuaţiile în z:

a) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$; b) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$; c) $z^2 + 2z - 7 - 6i = 0$;

d) $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 = 0$; e) $z^2 - (5 + 2i)z + 3(3 + i) = 0$.

51. Să se rezolve ecuaţiile în z:

a) $iz^2 - 2(1 + i)z + 3(2 + i) = 0$; b) $(1 + i)z^2 - (5 + 2i)z + 5 = 0$;
c) $(4 + 3i)z^2 + 2(2 - i)z + 2 - i = 0$; d) $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$.

52. Să se rezolve ecuaţiile în z:

a) $z^2 - 2(1 + i\alpha^2)z + 1 - \alpha^4 = 0$;

b) $z^2 - 2z + 1 + \alpha^2 = 0$, α fiind un parametru real.

53. Să se rezolve ecuaţia $\bar{z} = z^3$.

54. Fie funcţia $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = \begin{cases} \bar{z} + 2, & \text{dacă } z \notin \mathbf{R}, \\ 3z - 1, & \text{dacă } z \in \mathbf{R}. \end{cases}$

a) Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa funcţiei f;

b) Să se rezolve ecuaţia $f(z) = 3z$.

55. Să se simplifice fracţiile:

a) $\dfrac{X^2 - \sqrt{2}X + 1}{X^4 + 1}$; b) $\dfrac{X^2 - iX - (1 + i)}{X^2 - 2X + 2}$; c) $\dfrac{X^3 - 3X^2 + 7X - 5}{X^3 - 5X^2 - 9X - 5}$;
d) $\dfrac{X^2 - 2aX + a^2 + b^2}{iX^2 - iaX + b(a + bi)}$, $(a, b \in \mathbf{R})$.

56. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^6 - y^3 = 98, \\ x^4 + x^2y + y^2 = 49; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^6 + y^6 = -16, \\ x^2 + y^2 = -4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^3 - 3y^4 = -19, \\ xy^2 = -6. \end{cases}$

57. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} (1 + 3i)x - 2(1 - 2i)y + 2(3 - i) = 0, \\ 2(2 + i)x - (2 + 3i)y - (5 + 4i) = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2 + 3i)x + (2 - 3i)y = 7, \\ (1 + i)x + (1 - i)y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + (3 - 2i)y = -1 + i, \\ (3 + 2i)x + 3y = 2 + i. \end{cases}$

Capitolul VIII
FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ ŞI FUNCŢIA LOGARITMICĂ

1. Fie a un număr real pozitiv. Să se decidă care dintre perechile de numere următoare este mai mare:

a) $a^{1+\sqrt{6}}$ şi $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ şi $a^{\sqrt{3}-2}$.

2. Să se găsească valorile lui x, pentru care sunt definiţi radicalii:

a) $\sqrt{(0,2)^x - 25}$; b) $\sqrt[4]{5^x - 0,04}$; c) $\sqrt[3]{3^{-4x} - \sqrt{3}}$; d) $\sqrt{a^x - a^{-x}}$, a fiind un număr real pozitiv.

3. Fie funcţiile:

a) $f_1 : [-1, 1] \to \mathbf{R}, f_1(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $f_2 : (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \to \mathbf{R},\ f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$;

c) $f_3 : [3, +\infty) \to \mathbf{R}, f_3(x) = \sqrt{3^x - 27}$;

d) $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_4(x) = \frac{1}{3^{|x|}}$;

e) $f_5 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_5(x) = 2^{2x} - 2^{x+3} + 18$.

Să se determine imaginea fiecărei funcţii.

4. Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care sunt adevărate inegalităţile:

a) $5^{(x-3)^2-|x-3|-2} < 1$; b) $\left(2\sqrt{2}\right)^{x+3} > \left(\frac{1}{8}\right)^{|x-4|}$; c) $\frac{2^x - 4}{3x^2 - 8x + 5} > 0$;

d) $|x|^{x^2-x-2} < 1$.

5. Să se traseze graficele funcţiilor:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = 3^{|x|}$;

b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_2(x) = 3^x + 3^{-x}$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_3(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3}$.

6. Să se găsească valorile lui x, pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_a|x|$; b) $\log_a(5 - x^2)$; c) $\log_a(x^4 - 5x^2 + 4)$; d) $\log_a\sqrt[3]{x^2 - x - 6}$;

e) $\log_a(\log_a x)$; f) $\log_a(\log_b x)$,

unde a şi b sunt numere reale pozitive, diferite de 1.

7. Fie a şi b numere reale pozitive, diferite de 1. Să se decidă care dintre numerele $\log_a b$ şi $\log_b a$ este mai mare.

8. Să se determine valorile lui x, pentru care au loc inegalităţile:

a) $\log_a x \leq 3\log_a x$; b) $\log_x|x| \geq 3\log_a|x|$.

9. Pornind de la graficul funcţiei logaritmice să se traseze graficele următoarelor funcţii:

a) $f_1 : (1, +\infty) \to \mathbf{R},\ f_1(x) = \log_3(x - 1)$;

b) $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ f_2(x) = |\log_3 x|$;

c) $f_3 : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ f_3(x) = \log_3|x|$;

d) $f_4 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad f_4(x) = \log_3 x^2$;
e) $f_5 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad f_5(x) = \log_3 \sqrt{x}$;
f) $f_6 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad f_6(x) = \log_3 \frac{x}{3}$.

10. Să se determine x astfel încât să avem

a) $\log_a x = \frac{2}{3}\left[\log_a m + \frac{3}{4}\log_a(m+n) - 2\log_a(m-n)\right] - \frac{1}{2}\log_a n$;

b) $\log_a x = -\frac{1}{3}\log_a u + \frac{1}{4}\left[\log_a v - \frac{2}{3}\log_a u + \frac{2}{3}\log_a(u+v) - \frac{1}{2}\log_a(u-v)\right]$

11. Să se demonstreze că, dacă $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$, atunci $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

12. Să se calculeze $\log_6 16$ în funcţie de $a = \log_{12} 27$.

13. Dacă $a = \log_{30} 3$ şi $b = \log_{30} 5$, să se calculeze în funcţie de a şi b numărul $\log_{30} 16$.

14. Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

15. Să se demonstreze că:

$$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

16. Să se demonstreze că

$$\log_a n \log_b n + \log_b n \log_c n + \log_c n \log_a n = \frac{\log_a n \log_b n \log_c n}{\log_{abc} n}.$$

17. Dacă $2\log_a(x - 2y) = \log_a x + \log_a y$, să se calculeze $\frac{x}{y}$.

18. Dacă $\log_{60} 3 = m$ şi $\log_{60} 5 = n$, să se calculeze în funcţie de m şi n, numărul $\log_3 4 + \log_{12} 2$.

19. Să se demonstreze că numerele: $\log_2 3$, $\log_5 10$, $\log_{1/2} 5$ sunt iraţionale.

20. Fie a şi b numere raţionale pozitive, diferite de 1. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca $\log_a b$ să fie un număr raţional.

21. Să se demonstreze că dacă numerele reale a şi b sunt astfel încât $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, atunci are loc inegalitatea

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

22. Fie funcţia $f : [1, 64] \to \mathbf{R}$,

$$f(x)=(\log_2 x)^4+12(\log_2 x)^2\log_2\left(\frac{8}{x}\right).$$

Să se determine valoarea lui x, pentru care f să aibă valoarea maximă.

23. Să se demonstreze că $\frac{1}{\log_{a_1} a_2}+\frac{1}{\log_{a_2} a_3}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_n} a_1}\geq n$, unde $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1)$ sau $a_1, \ldots, a_n \in (1, +\infty)$.

24. Să se demonstreze că

$$\log_{a_3}\sqrt[n]{a_1a_2}+\log_{a_4}\sqrt[n]{a_2a_3}+\ldots+\log_{a_1}\sqrt[n]{a_{n-1}a_n}+\log_{a_2}\sqrt[n]{a_na_1}\geq 2,$$

unde $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1)$ sau $a_1, \ldots, a_n \in (1, +\infty)$.

25. Să se decidă care dintre numerele $\log_2 3$ şi $\log_3 4$ este mai mare.

26. Dacă $\log_{bc} a = x$, $\log_{ca} b = y$ şi $\log_{ab} c = z$, să se arate că

$$a^{(x+1)(y-z)}b^{(y+1)(z-x)}c^{(z+1)(x-y)}=1.$$

27. Să se demonstreze că $\log_{xy} z+\log_{yz} x+\log_{xz} y\geq\frac{3}{2}$, unde $x, y, z \in (0, 1)$ sau $x, y, z \in (1, +\infty)$.

28. Să se arate că $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.

29. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left(\frac{5}{22}\right)^{2x-3}=(4,4)^{3x-2}$; b) $\left(a^{x^2+x-2}\right)^{3-x}=1$ $(a>0)$;

c) $8\sqrt{(0,25)^{5-x/2}}=2^{\sqrt{x-1}}$; d) $16^{\frac{x+5}{x-7}}=512\cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}$;

e) $2^{1-x^2}\cdot 2^{2x}=64^{-1}$; f) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{2}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^{3x-4}}$;

g) $4^{|x^2-3x+2|}=16^{x+1}$; h) $27\cdot 3^{|x-2|}\cdot 9^{1/2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

30. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3^{x+1}+3^x=108$; b) $2^{x+1}-3\cdot 2^{x-2}+32=0$; c) $2^{x+2}-2^{x-1}=28$; d) $5^{2x+1}-5^{2x-1}=120$.

31. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$; b) $2\cdot 7^{2x+2}+7^{2x-1}=687$; c) $3^x-2\cdot 3^{x-1}-2\cdot 3^{x-2}=1$; d) $3^{x-1}+3^{x-2}-3^{x-4}=315$; e) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}=896$; f) $2^{x+3}+2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=30$.

32. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=6^x+6^{x+1}$; b) $3^{x+1}+5^{x+2}=3^{x+5}-3\cdot 5^{x+3}$; c) $2^{x+3}+2^{x+2}+2^{x+1}=7^x+7^{x-1}$; d) $7^{2x-1}+7^{2x}+7^{2x+1}=5^{2x-1}+5^{2x}+5^{2x+1}$.

33. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\cdot 2^{2x} - 3\cdot 2^{x} + 1 = 0$; b) $2^{x} + 4^{x} = 272$; c) $9^{x} - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$;

d) $64^{1/x} - 2^{3+3/x} + 12 = 0$; e) $3\cdot 3^{x+2} + 9 = \sqrt{81^{2x-1}} + 3^{4x}$.

34. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3^{4\sqrt{x}} + 2\cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3 = 0$; b) $25^{\sqrt{x-3}} - 5\cdot 5^{\sqrt{x-3}} - 500 = 0$;

c) $3^{2\sqrt[4]{x}} - 4\cdot 3^{\sqrt[4]{x}} + 3 = 0$.

35. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $1 + \dfrac{16}{3^{x} - 1} = \dfrac{1}{3^{x-3}}$; b) $a^{x-2} + a^{2-x} = 2$ $(a > 0)$;

c) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$; d) $\sqrt{3^{x}} + \sqrt{3^{-x}} = 10$.

36. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left(4+\sqrt{15}\right)^{x} + \left(4-\sqrt{15}\right)^{x} = 62$; b) $\left(5+\sqrt{24}\right)^{x} + \left(5-\sqrt{24}\right)^{x} = 98$;

c) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9} = 2$.

37. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2^{2x} - 13\cdot 6^{x-1} + 9^{x} = 0$; b) $6\cdot 9^{1/x} - 13\cdot 6^{1/x} + 6\cdot 4^{1/x} = 0$;

c) $4^{x} + 2^{x+1}\cdot 3^{x} - 3\cdot 9^{x} = 0$; d) $2^{2x+2}\cdot 10^{x+1} - 10\cdot 2^{3x}5^{x} = 1200$;

e) $3^{2x^2+6x-9} + 4\cdot 15^{x^2+3x-5} = 3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

38. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $9^{\sqrt{x^2+3}} - 3^{1+\sqrt{x^2+3}} = 54$; b) $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} = 2$.

39. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia $\dfrac{2^{x} + a\cdot 3^{x}}{2^{x} - a\cdot 3^{x}} = 2$, $(a \in \mathbf{R})$.
Să se afle valorile lui a pentru care ecuaţia are o soluţie întreagă.

40. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^{2x} - (x^2 + x)x^{x} + x^3 = 0$;

b) $(x + 4)3^{1-|x-1|} - x = (x + 1)|3^{x} - 1| + 3^{x+1} + 1$.

41. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3^{x} + 4^{x} = 5^{x}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = 2^{\sqrt{x-3}}$; c) $8^{x}(3x + 4) = 4$;

d) $(2+a)^{\sqrt{x-4}} + (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 2$, unde $|a| \le 1$.

42. Să se determine valorile reale ale lui x, astfel încât să fie satisfăcute inecuaţiile:

a) $|x|^{2x^2-3x+1} \le 1$; b) $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{3^{x}+1}{9^{x}+3} \le \dfrac{1}{2}$.

43. Fie funcţia $f: [0, 1] \to \mathbf{R}, f(x) = 2^x \cdot 3^{1-x} + 2^{1-x} \cdot 3^x$.

Să se arate că f este descrescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ şi crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

44. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_x\left(3x^2 - 5x\right) = 1$; b) $\log_{x+1}\left(3x^2 + 2x - 3\right) = 2$;

c) $\log_{x^2-1} 27 = 3$; d) $\log_{\sqrt{x-1}}\left(2x^2 + 2x + 5\right) = 4$;

e) $\log_{\sqrt{x^2+2}}\left(2x^4 + x^2 + 6\right) = 4$;

f) $\log_{\sqrt{x}}\left(x + |x-2|\right) = \log_x\left(5x - 6 + 5|x-2|\right)$.

45. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_a \log_a \log_a x = 0$; b) $\log_a \log_{a^2} \log_{a^3} x = 0$;

c) $\log_a \log_b \log_c x = 0$; d) $\lg(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x-3) - \lg 25$;

e) $\log_x 2 \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$; f) $\log_a\left(a \log_b\left(b \log_c x\right)\right) = 1$;

46. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{\log_a(x-3)}{\log_a\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{\log_{x+2}\sqrt[3]{x^2+2}}{\log_{x+2}(2x-1)} = \frac{1}{3}$;

c) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_x x^2+2} = 2\log_3 27$; d) $\frac{1}{2}\lg\sqrt{x^3 - 3a^4} = \lg x + \log\frac{a}{x}$;

e) $\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} = \lg\sqrt{1-x^2} - 2$;

f) $\log_{x^2-6x+8}\left[\log_{2x^2-2x+3}\left(x^2+2x\right)\right] = 0$.

47. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_{15}\frac{1}{3^x + x - 5} = x\left(\log_{15} 5 - 1\right)$; b) $\lg\left(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x\right) = x + \lg 25$;

c) $\lg\left(x^2 - 3x - 4\right) - x = \lg(x+1) - 5$; d) $\lg\left(10^{2x-1} + 7 \cdot 10^{x-1}\right) =$
$= \lg\left(10^{x+1} - 2\right) - 1$; e) $(x-1)(1 - \log_6 3) = \log_6\left(2^{x-1} + x - 2\right)$;

f) $\log_x\left(2 \cdot x^{x-2} - 1\right) = 2x - 4$; g) $\log_2\left(9^{x-1} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-1} + 1\right)$.

48. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\lg^2 x - 4\lg x + 3 = 0$; b) $\frac{1}{4}\lg^4 x - 3\lg^2 x + 8 = 0$;

c) $4\lg^4 x - 5\lg^2\left(x^2\right) + 16 = 0$; d) $\left(4\lg^2(x+1) - 1\right)\left(\lg^2(x+1)^2 + 1\right) = 15$;

e) $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0$; f) $\log_x\sqrt[3]{4}+3\log_x\left(x\sqrt[3]{2}\right)+\log_x^2\sqrt[3]{4}=12$

49. Să se rezolve ecuaţia $\log_a^m x^n-\log_a^n x^m=0$, unde m şi n sunt numere naturale.

50. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^x=x$; b) $x^{\log_3 x+4}=243$; c) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{\lg x+7}=10^{\lg x+1}$; d) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$;

e) $7^{\log_{25}^2(5x)-1}-x^{\log_5 7}=0$; f) $x^{\log_2 x}+8x^{-\log_2 x}=6$;

g) $|x-1|^{\log_3 x^2-2\log_x 9}=(x-1)^2$; h) $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot 6^{\log_3 x}+6=0$.

51. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_2 x+\log_3 x=1$; b) $\log_3 x+\log_5 x=\log_{10}\dfrac{3}{2}+1$;

c) $\log_{a^2} x+\log_a x^2=1$; d) $\log_2^2(x-2)^2-\log_{1/2}(x-2)=5$;

e) $\log_5 2+\log_{25} x=\log_{1/5}\sqrt{8}$; f) $\log_{x+2} x+\log_x(x+2)=\dfrac{5}{2}$.

52. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\log_a x}{\log_b x\log_c x}=\frac{\log_a b}{1+\log_c a}$$

53. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x+2^x+\log_2 x=7$; b) $2^x+\log_2 x+3^{x/2}+\log_3\dfrac{x}{2}=8$.

54. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\dfrac{a}{x}}}=a$;

b) $\log_a x+(a+\log_a x)\log_{\sqrt{x}} a=2a\log_x a$;

c) $6\log_x a+3\log_{a^2x} a-\dfrac{14\log_{ax} a}{\log_a x}=0$.

55. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}3^{x+y}=243,\\2^{3y-x}=8;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2^x-3^{2y}=15,\\\sqrt{2^x}-3^y=3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^{y^2-3y+3}=x,\\x+2y=5;\end{cases}$

d) $\begin{cases}2^x\cdot 5^y=250,\\2^y\cdot 5^x=40;\end{cases}$ e) $\begin{cases}x^y=2,\\(2x)^{y^2}=64;\end{cases}$ f) $\begin{cases}x^{2y-1}=5,\\x^{y+2}=3;\end{cases}$

g) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y, \end{cases} \begin{pmatrix} a > 0, \ a \neq 1 \\ b > 0, \ b \neq 1 \end{pmatrix};$ h) $\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = b, \\ a^{x+y} = c; \end{cases} (a, \ b, \ c > 0);$

i) $\begin{cases} x^{y-2} + x^{2-y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^y + x^{-y} = \dfrac{65}{8}; \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{y-2}} = 36, \\ 9^{\sqrt[3]{x}} + 4^{\sqrt[4]{y-2}} = 97; \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^{x^2-y^2+8x+1} = 1, \\ 2^y = 8 \cdot 2^x; \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^m = y^n, \end{cases} (m \neq n);$ m) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y + 2^z = 124, \\ 3^y \cdot 2^z + 2^x = 436, \\ 2^z \cdot 2^x + 3^y = 91; \end{cases} (x, \ y, \ z \in \mathbf{Z}).$

56. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2 \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1 \end{cases}$$

57. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 \dfrac{1}{y} = 3, \\ x^2 + 16y^2 = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x - 2\lg y = 1, \\ x^2 y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 + y = 12; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2 (y - x) = \log_4 (y - 2xy), \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 0, \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^a = y^b, \\ \log_c \dfrac{x}{y} = \log_y x, \end{cases} (a, \ b, \ c > 0, \ c \neq 1);$

h) $\begin{cases} |x|^{\lg y} = 4, \\ xy = 40; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5^{\lg x} - 3^{\lg y} = 0, \\ (3x)^{\lg 3} - (5y)^{\lg 5} = 0; \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x - y\log_x y = (x + y)\log_x y \end{cases}$

k) $\begin{cases} \log_m x + \log_n y = a, \\ \log_n x + \log_m y = b; \end{cases}$ l) $\begin{cases} \log_x y + \log_{3x} y^2 = 4, \\ \log_y x + \log_{3y} x^2 = \dfrac{7}{6}; \end{cases}$

m) $\begin{cases}(\log_a x)^2+(\log_a y)^2=2m,\\ x^{\log_a x}+y^{\log_a y}=2\cdot\dfrac{p^2+q^2}{p^2-q^2}a^m\end{cases}$ $(p\neq q)$ n) $\begin{cases}(xy)^{\lg z}+(xz)^{\lg y}=a,\\ (yz)^{\lg x}+(yx)^{\lg z}=b,\\ (zx)^{\lg y}+(zy)^{\lg x}=c.\end{cases}$

58. Să se rezolve

$$\begin{cases}4\log_2^2 x+1=2\log_2 y\\ \log_{\frac{1}{2}} x^2\le\log_{\frac{1}{2}} y\end{cases}$$

59. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\log_{1/2}\left(x^2+2x\right)>0$;

b) $\log_a\left(6x^2+5x+1\right)<0$;

c) $\log_x\dfrac{4x+5}{6-5x}<1$;

d) $\log_a\left(3x^2-5x-3\right)<\log_a(4x-3)$;

e) $x\log_a 4<\log_a\left(2^x+6\right)$;

f) $\log_3\left(3^{4x}-3^{2x+1}+3\right)<2\log_9 7$;

g) $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-5}{|x-2|}\right)\ge\dfrac{1}{2}$;

h) $\log_{\frac{x^2-10x+31}{30}}\left(5x-\dfrac{11}{20}\right)\le 0$;

i) $\log_9^2 x\ge\log_3^2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}$;

j) $\log_3\left(3^x-3\right)\cdot\log_{1/3}\left(3^{x+1}-9\right)<-6$;

k) $\log_2\log_{1/2}\left(x^2-3x+2\right)\le 1$;

l) $\log_2\left(\left|\dfrac{x-1}{x-5}\right|+7\right)>3$;

m) $\log_x(x+2)>\log_{x+2}x$;

n) $\dfrac{\ln\left(2x^2-3x+1\right)}{x^2-3x}\ge 0$.

60. Să se determine valorile lui x, pentru care sunt definiţi radicalii următori:

a) $\sqrt{\left|\ln^3 x+\ln x+|\ln x|\right|-\left|\ln^3 x-\ln x+|\ln x|\right|}$; b) $\sqrt{\log_a x+\log_{ax} x}$.

61. Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea $\log_{\frac{a-1}{a+1}}\left(x^2+3\right)\ge 1$ este adevărată pentru orice x real.

62. Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea $\log_{\frac{1}{a+1}}\left(x^2+2|a|\right)>0$ este adevărată pentru orice x real.

63. Să se determine valorile lui a astfel încât inecuaţia

$\log_{1/a}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\log_a 3\geq 0$ să aibă o soluţie unică.

64. Să se determine toate numerele reale m, astfel încât inegalitatea $m\cdot 4^x+4(m-1)\cdot 2^x+m>1$ să fie adevărată pentru orice x real.

65. Să se determine toate numerele reale m, astfel încât inegalitatea $(m+1)e^{-2x}+m\left(e^{-x}+1\right)>0$ să fie adevărată pentru orice x real.

66. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât mulţimea S a soluţiilor inecuaţiei $4^x-m\cdot 2^x-m+3\leq 0$ să fie nevidă. Pentru care valori ale lui m, mulţimea S este infinită?

67. Fie a, b, c numere reale distincte şi presupunem că α, β, γ sunt numere reale astfel încât pentru orice număr real x,

$$\alpha e^{ax}+\beta e^{bx}+\gamma e^{cx}=0.$$

Să se arate că $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Capitolul IX
INDUCŢIA MATEMATICĂ

1. Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n\geq 1$, sunt adevărate propoziţiile:

a) $1^2-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

c) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$;

d) $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, unde $x\neq 1$.

2. Să se calculeze sumele următoare şi apoi să se demonstreze, prin inducţie matematică, că formulele găsite sunt adevărate pentru orice număr natural $n\geq 1$:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)$;

b) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$.

3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, este adevărată egalitatea $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k + 2 \cdot 3 \ldots k(k+1) + \ldots + n(n+1) \ldots (n+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \ldots (n+k)}{k+1}$, unde $k \geq 2$ este un număr natural.

4. Să se calculeze sumele următoare şi apoi, să se demonstreze prin inducţie matematică formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

5. Să se calculeze sumele următoare şi apoi să se demonstreze, prin inducţie matematică, formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; b) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; d) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

e) $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$, unde $k \geq 1$ este un număr natural.

6. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, sunt adevărate egalităţile:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

b) $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$.

7. Să se calculeze sumele următoare şi apoi să se demonstreze prin inducţie matematică formulele găsite:

a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$; b) $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$; c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$;

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$; e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$; f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

8. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

pentru orice număr natural $n \geq 1$.

9. Să se demonstreze că, pentru orice $n \geq 2$ număr natural, avem:

$$\log_x \sqrt{a}+\log_{x^2}\sqrt[3]{a}+\log_{x^3}\sqrt[4]{a}+\ldots+\log_{x^n}\sqrt[n+1]{a}=\log_x \sqrt[n+1]{a^n}.$$

10. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, au loc identitățile:

a) $\cos\alpha \cos 2\alpha \ldots \cos 2^n\alpha=\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$;

b) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\sin\dfrac{nx}{2}$;

c) $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$;

d) $\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx=\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$;

e) $\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

11. Să se determine toate numerele întregi x astfel încât

$$3x+1<2\log_2(x+4).$$

12. Să se determine numerele naturale n pentru care este îndeplinită inegalitatea $2^n > n^2$.

13. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n}.$$

14. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$, au loc inegalitățile: $\sqrt{n}<2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$

15. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

16. Fie a, b numere reale cu $a + b > 0$, $a \neq b$. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, avem $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$.

17. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că:

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \geq 1+\frac{k}{n}$, pentru orice număr natural k;

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}$, pentru orice număr natural $k \leq n$.

Să se deducă de aici, că pentru orice număr natural n, avem

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

18. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 6$, avem:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

19. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$ și numerele reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, avem $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

(vezi exercițiul 26, III, cap. IV).

20. a) Dacă x_1, x_2 sunt numere reale astfel încât $x_1 < 1$ și $x_2 > 1$, atunci $x_1 + x_2 \geq x_1x_2 + 1$.

b) Oricare ar fi $n \geq 2$, natural, și numerele reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $a_1a_2...a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$.

c) Să se demonstreze, folosind punctul b), inegalitățile dintre media armonică, media geometrică și media aritmetică a n numere reale pozitive.

21. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n și numerele reale $a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, avem $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

22. Să se demonstreze că suma cuburilor oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 9.

23. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, $n^5 - n$ se divide cu 30.

24. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133; b) $4^n + 15n - 1$ se divide cu 9;
c) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ se divide cu 17; c) $6^{10n+1} + 5^{11n-1}$ se divide cu 31.

25. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ se divide cu 23.

26. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, avem:
a) $2^n > n$; b) $2^{n+2} > 2n + 5$.

27. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 3$, avem:
a) $2^n > 2n + 1$; b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

28. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 4$, avem $3^n > n^3$. Să se deducă că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, pentru $n \geq 4$.

29. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, avem

$$|\sin nx| \leq n\,|\sin x|.$$

30. Să se demonstreze că

$$\{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 8\} = \{3p + 5q \mid p, q \in 3p + 5q \geq 8\}.$$

31. Să se demonstreze că oricare ar fi n drepte diferite situate in acelaşi plan şi care sunt concurente, împart planul în $2n$ părţi.

32. Să se demonstreze că oricare ar fi n plane, care trec prin acelaşi punct, astfel încât oricare trei dintre ele nu au o dreaptă comună, împart spaţiul în $n(n - 1) + 2$ părţi.

33. Să se demonstreze că n drepte situate într-un plan, astfel încât oricare două dintre ele nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente, împart planul în $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ părţi.

34. Să se demonstreze că n plane astfel încât:
I) oricare două dintre plane nu sunt paralele;
II) oricare trei dintre plane nu trec printr-o aceeaşi dreaptă;
III) oricare patru nu trec prin acelaşi punct;
IV) oricare două drepte de intersecţie ale planelor date nu sunt paralele, împart spaţiul în $\dfrac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{7}$ părţi.

35. Să se demonstreze că n cercuri, situate într-un plan, împart planul în cel mult $n^2 - n + 2$ părţi. Dar, dacă cercurile sunt două câte două secante?

36. Fie n pătrate ârbitrare, unde n este un număr natural oarecare. Să se demonstreze că ele pot fi tăiate în părţi, astfel încât din părţile obţinute să se poată construi un nou pătrat.

37. (Teorema lui Euler). Fie s numărul ţărilor unei hărţi arbitrare, l numărul frontierelor ei şi p numărul vârfurilor. Să se arate că $s + p = l + 2$.

38. Dacă p este numărul vârfurilor, l numărul muchiilor şi s numărul feţelor unui poliedru convex, să se arate că $s + p = l + 2$.

39. Să se demonstreze că n sfere, astfel încât oricare două se intersectează între ele, şi oricare trei nu au un cerc comun, împart spaţiul în $\frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}$ părţi.

Capitolul X
ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$; b) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$.

2. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420$; b) $\frac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000$.

3. Să se afle pentru câte valori ale lui $n \geq 2$, natural, au loc inegalităţile: a) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 306$; b) $\frac{(2n)!}{n!} < 1000$.

4. În câte moduri se pot aşeza cinci copii pe o bancă?

5. a) Popescu, Ionescu, Georgescu, Vasilescu, Stătescu trebuie să vorbească la o întrunire. În câte moduri se poate face ordinea înscrierilor la cuvânt în aşa fel încât Ionescu să nu vorbească înaintea lui Popescu?

b) Aceeaşi problemă cu condiţia ca Popescu să ia cuvântul de fiecare dată imediat înaintea lui Ionescu.

6. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele posibile de câte şase cifre, astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice. Să se afle:

a) Câte astfel de numere se pot obţine?

b) Câte numere încep cu cifra 1?

c) Câte numere se termină cu cifra 1?

d) Câte numere încep cu 10?

e) Câte numere nu încep cu 10?

7. Să se determine numărul tuturor numerelor naturale de cinci cifre scrise în baza zece, formate din:

a) cifre pare;

b) cifre pare distincte.

8. Câte variante de coliere se pot realiza din şapte mărgele de dimensiuni diferite, încât fiecare colier să conţină toate cele şapte mărgele?

9. În câte moduri se pot aşeza, pe o tablă de şah, opt turnuri astfel încât nici unul dintre ele să nu poată lua pe celălalt?

10. Fie date n numere $a_1, a_2, ..., a_n$. Să se găsească numărul permutărilor acestora, astfel încât $a_1, a_2, ..., a_k$ să nu ocupe k locuri la rând?

11. În câte moduri se poate ordona mulţimea $\{1, 2, ..., n\}$ astfel încât fiecare număr divizibil cu 2, şi fiecare număr divizibil cu 3, să aibă rangul divizibil cu 2 şi respectiv 3?

12. Să se calculeze

a) $\dfrac{A_n^5 + A_n^7}{A_n^6}$; b) $\dfrac{A_n^{n-1} - P_n}{C_n^{n-2}}$; c) $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}}$; d) $\dfrac{A_{n+3}^n}{(n+2)A_{n+1}^{n-2}}$;

e) $\dfrac{A_n^2 \cdot P_k - 2P_{k+1}}{P_{k+1}}$; f) $\dfrac{A_{n+k}^{n-k+2} + A_{n+k}^{n-k+1}}{A_{n+k}^{n-k}}$; g) $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$; h) $\dfrac{A_n^k \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$.

13. Să se rezolve ecuaţiile în n:

a) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; b) $P_{n-3} \cdot A_n^3 = 20P_{n-2}$; c) $A_7^n = mA_7^{n-1}$;

d) $P_{n+2} = 182A_n^{11} \cdot P_{n-11}$; e) $A_{n+1}^{k+1} \cdot P_{n-k} = 90P_{n-1}$.

14. În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziţie pânză de steag de cinci culori diferite?

15. Câte dicţionare sunt necesare pentru a traduce direct din una în alta din următoarele şase limbi: română, rusă, engleză, franceză, germană, italiană?

16. Cinci creioane de diferite culori se împart la 9 copii de vârste diferite, fiecare copil primind cel mult un creion. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă copilul mai mic va primi neapărat un creion?

17. Câte numere naturale diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată?

18. În plan sunt date n puncte, oricare trei dintre ele necoliniare. Câte linii poligonale (închise şi neînchise) cu k segmente se pot duce cu vârfurile în punctele date?

19. Să se calculeze:

a) $\dfrac{C_{n+k}^k \cdot P_k - A_{n+k}^k}{P_k}$; b) $\dfrac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-1}^{k-1}}$.

20. Să se calculeze C_n^7 dacă $C_{20}^n = C_{20}^{n+2}$.

21. Să se afle n, dacă:

a) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$; b) $3C_{2n}^{n+1} = 5C_{2n-1}^{n}$; c) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$;

d) $C_{n+2}^4 = n^2 - 1$; e) $C_{n+3}^{n+1} = n^2 - 4$; f) $C_{7n}^{n^2+10} = C_{28}^2$;

g) $C_{n-2}^2 + C_{n-2}^3 + C_{n-2}^4 = 19$; h) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 = 55$;

i) $30C_{n-3}^{n-9} = 19A_{n-4}^4$

22. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$; b) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$; c) $C_{15}^{k-2} > C_{15}^k$; d) $5C_n^3 > C_{n+2}^4$.

23. Să se determine valorile lui n, întregi pentru care numărul $C_{5n+4}^{n^2+3n-4}$ este definit.

24. Un elev are nouă cărţi de matematică, iar altul are 7 cărţi. În câte moduri pot să schimbe cărţile între ei, o carte în schimbul alteia? Dar dacă schimbă câte două cărţi în schimbul altora două?

25. Pentru un joc de agrement, cinci fete şi trei băieţi trebuie să formeze două echipe de câte patru. În câte moduri se pot forma echipele? Dar dacă în fiecare echipă trebuie să fie neapărat un singur băiat?

26. Pentru întocmirea orarului unei clase de elevi, trebuie să fie programată în fiecare zi, fie o oră de desen din cele două pe săptămână, fie o oră de fizică din cele patru pe săptămână. În câte moduri se poate face această programare?

27. Câte numere de câte cinci cifre se pot forma astfel încât în fiecare număr fiecare cifră să fie mai mare decât precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decât precedenta?

28. Dintr-o grupă de 15 copii, dintre care 9 băieţi şi 6 fete, trebuie să fie formată o echipă de 7 copii, în care să intre cel puţin 3 fete. În câte moduri se poate forma această echipă?

29. La o serată dansantă participă 7 fete şi 8 băieţi. La un anumit dans trebuie să se formeze 4 perechi. În câte moduri se pot forma cele patru perechi?

30. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y, \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} = 8A_{2y}^{3x-1}, \\ 9C_{2y}^{3x} = 8C_{2y}^{3x-1}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3}, \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} xC_{n-1}^k + \dfrac{n}{k}y = \dfrac{k+1}{n}, \\ xC_{n-1}^{k-1} - \dfrac{n}{k+1}y = \dfrac{k}{n}. \end{cases}$

31. Să se arate că:

a) $\dfrac{C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + \ldots + C_{2n}^n}{C_1^1 + C_3^2 + C_5^3 + \ldots + C_{2n-1}^n} = 2$; b) $\dfrac{C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n}^n}{C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n-1}^n} = 2^n$;

c) $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$.

32. Să se calculeze:

a) $C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2$; b) $\left(C_2^2\right)^2 + \left(C_3^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^2\right)^2$.

33. Să se arate că dacă N_r este suma tuturor produselor de r factori luaţi dintre numerele 1, 2, ..., n, atunci $1 + N_1 + N_2 + \ldots + N_{n-1} = n \cdot n!$.

34. Fie M o mulţime cu n elemente. Să se calculeze:

a) card $\{(X, Y) \mid X, Y \subset M$ şi $X \cup Y = M\}$;

b) card $\{(X, Y) \mid X, Y \subset M$ şi $X \cap Y = \varnothing\}$.

35. Să se arate că $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot k!(2n-k)! = \dfrac{(2n+1)!}{n+1}$, unde n şi k sunt numere naturale cu $k \leq 2n$.

36. Dacă $S_k = 1!(1 + 1^2) + 2!(1 + 2^2) + \ldots + k!(1 + k^2)$, să se arate că $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)S_1 + \left(1+\dfrac{1}{2}\right)S_2 + \ldots + \left(1+\dfrac{1}{n}\right)S_n = (n+2)! - 2$.

37. Să se dezvolte, după formula lui Newton, binoamele la putere:

a) $(x + a)^7$; b) $(x^2 - 2y)^6$; c) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^7$; d) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^6$;

e) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{y}}\right)^5$; f) $\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^6 + \left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right)^6$;

g) $\left(1 + \sqrt{a}\right)^7 - \left(1 - \sqrt{a}\right)^7$; h) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^5 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^5$.

38. Să se determine:

a) termenul al optulea al dezvoltării $(2x + a)^{10}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^9$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\dfrac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{14}$;

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $\left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^{13}$.

39. Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^{14}$ care îl conţine pe x^6;

b) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y^2}\right)^{15}$ care îl conţine pe y^2;

c) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b}+\frac{b}{\sqrt[4]{a}}\right)^{22}$ care conţine pe $\frac{1}{a^2}$;

d) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ care nu conţine pe a;

e) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{20}$ în care nu apare x.

40. Să se determine rangul termenului din dezvoltarea:

$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}\right)^{43}$ în care x şi y au puteri egale.

41. Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(a+x)^n$ coeficientul lui x^5 este egal cu coeficientul lui x^{10}.

42. Să se determine n, dacă coeficientul binomial al termenului de rang trei, al dezvoltării $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^n$, este egal cu 190.

43. Să se determine n, dacă suma coeficienţilor termenilor, care au rangul doi, trei şi respectiv patru, ai dezvoltării $\left(x^{-1}-\sqrt{x}\right)^n$ este egală cu 41.

44. În dezvoltarea $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali ai primilor trei termeni este 121. Să se găsească termenul în care nu apare x.

45. Să se găsească termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^n$, dacă coeficientul termenului al treilea este 28.

46. Să se determine x, dacă termenul al treilea al dezvoltării $\left(x+x^{\lg x}\right)^5$ este 10^6, logaritmul fiind în baza 10.

47. Să se determine m, natural, astfel încât al zecelea termen al dezvoltării $(5+m)^m$ să fie cel mai mare.

48. Să se determine n şi x dacă, în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}}+3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienţilor primilor trei termeni este egală cu 22, iar suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este 420.

49. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{1+\lg x}}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$, logaritmul fiind în baza 10. Să se afle x, ştiind că al patrulea termen al dezvoltării este egal cu 200.

50. Să se determine termenul care conţine pe $x^{\frac{2}{3}}$ în dezvoltarea $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^n$, ştiind că suma coeficienţilor binomiali este egală cu 128.

51. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali de rang impar este egală cu 256. Să se găsească termenul care conţine $\frac{1}{a}$.

52. Să se găsească termenii raţionali ai dezvoltărilor următoare:
a) $\left(\sqrt[5]{2}-\sqrt[7]{3}\right)^{24}$; b) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^{10}$

53. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{200}$.

54. Să se găsească termenii iraţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

55. Să se determine m, n, p astfel încât în dezvoltarea $\left(x^m+\frac{1}{x^p}\right)^n$ termenii de rang 12 şi 24 să conţină pe x, respectiv pe x^5 şi, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

56. Să se găsească numărul total al termenilor dezvoltării $(x+y)^{2n+1}+$ $+(x-y)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, după ce se efectuează reducerile de termeni posibile.

57. Fie a şi b numere întregi nenule ($b > 0$) prime între ele, astfel încât $\sqrt[7]{a}$ şi $\sqrt[14]{b}$ să fie iraţionale. Fără a efectua dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[7]{a}+\sqrt[14]{b}\right)^{77}$, să se găsească numărul termenilor raţionali ai acesteia.

58. Să se determine coeficientul termenului, care conţine x^3 în produsul dezvoltărilor $(1 + x)^7(1 - x)^4$.

59. Să se găsească suma coeficienţilor dezvoltărilor:

a) $(9x^4 - 8y^3)^{19}$; b) $(8x^2 - 6y^3)^8$.

60. Să se găsească suma coeficienţilor dezvoltării $(9x - 8y)^n$.

61. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltările:

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\right)^{100}$.

62. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, numărul $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ este natural.

63. Să se determine numărul de termeni care trebuie luaţi în dezvoltarea $\left(1+10^{-2}\right)^{10}$ pentru a se defini numărul $\left(1+10^{-2}\right)^{10}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, respectiv 10^{-4}.

64. Să se arate că $\sum\limits_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k}(-3)^k = 2^{6n}$.

65. Să se demonstreze că:

a) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; b) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

66. Să se demonstreze că:

a) $1-3C_n^2+9C_n^4-27C_n^6+\ldots=(-1)^n 2^n\cos\frac{2n\pi}{3}$;

b) $C_n^1-3C_n^3+9C_n^5-\ldots=\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}$.

67. Să se demonstreze că:

a) $C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{9}C_n^5-\frac{1}{27}C_n^7+\ \ldots\ =\frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\sin\frac{n\pi}{6}$.

68. Să se demonstreze că :

a) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+\ \ldots\ =\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ \ldots\ =\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

d) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

69. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 2$ şi $|x| \leq 1$, avem $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2$.

70. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$; b) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$;

c) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$; d) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n$;

e) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n$;

f) $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)C_n^n$;

g) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n$; h) $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$;

i) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$; j) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$.

71. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)C_n^m$; b) $C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + \ldots + C_{n+m}^k$;

c) $C_n^0 + C_n^k + C_n^{2k} + \ldots$; d) $C_n^m + C_n^{m+k} + C_n^{m+2k} + \ldots$.

72. Să se calculeze următoarele sume:

a) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$;

b) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots + (-1)^n(C_n^n)^2$;

c) $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$;

d) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n$

e) $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2$.

Capitolul XI
PROGRESII ARITMETICE ŞI PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului, cu termenul al n-lea dat de formula:

a) $a_n = 5n - 2$; b) $b_n = n^2 - 3$; c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}$;

d) $y_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + (-1)^n n$; e) $z_n = \frac{2n}{3n+1}$;

f) $c_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{(-1)^{n+1}}$; g) $a_n = \frac{1+(-1)^n+(-1)^{n+1}}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n-lea ($n \geq 1$) pentru fiecare din şirurile:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$; b) 0; 0,01; 0,0101; ...;

c) $\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}, \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}, \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}, \ldots$; d) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \ldots$; e) $\frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{11}{17}, \ldots$.

3. Şirul (x_n), $n \geq 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 3n^2 - 2$. Să se decidă dacă este termen al acestui şir numărul:

a) 190; b) 241; c) 3725; d) 15985.

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului (a_n), definit prin:

a) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = a_n + \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $a_1 = \beta_1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $\beta \in \mathbf{R}$; c) $a_1 = \gamma$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$, $\gamma \in \mathbf{R}$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_{n+2} = \alpha a_n - \beta_{an+1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_{n+2} = \beta a_n + \alpha a_{n+1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5. Fie şirul de numere (a_n), unde $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, şi pentru orice număr natural k, avem: $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$. Să se demonstreze că $a_n = 2^n + 1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

6. Fie şirul de numere reale (a_n), unde $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ şi pentru orice număr natural k, avem $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2$. Să se găsească formula termenului general.

7. Fie şirul de numere (b_n) astfel încât $b_1 = 1$ şi $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{n(n+1)}$.

Să se găsească formula care defineşte termenul general.

8. a) Să se determine termenii negativi ai şirului (x_n), definit prin:

$$x_n = C_{n-5}^n - \frac{195}{16} \cdot \frac{C_{n+3}^n}{n+1},\ n \geq 1;$$

b) Să se determine termenii pozitivi ai şirului (x_n), definit prin:

$$x_n = \frac{195}{4n!} - \frac{A_{n+3}^3}{(n+1)!},\ n \geq 1.$$

9. Fie şirul (x_n), definit astfel: $x_1 = 1$ şi $x_{k+1} = (k+1)x_k$. Să se demonstreze că oricare ar fi n, avem $x_n = n!$.

10. Fie şirul (x_n), definit prin: $x_1 = \frac{2}{3}$ şi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Să se găsească formula care defineşte termenul general.

11. Fie α, β numere reale cu $\alpha \neq \beta$. Se defineşte (c_n) astfel încât:

$c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$ şi pt. fiecare $k \geq 2$, $c_k = (\alpha + \beta)c_{k-1} - \alpha\beta c_{k-2}$.

Să se arate că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

12. Fie α, β numere reale, astfel încât $\alpha \neq \beta$ şi $\alpha\beta \neq 1$. Se defineşte şirul (a_n) astfel încât $a_2 = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta) - 1}$, iar pentru fiecare $k \geq 3$,

$a_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{a_k}$. Să se demonstreze că pentru orice $n \geq 2$, avem

$$a_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}.$$

13. Fie S_n suma primilor n termeni ai şirului

0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...

a) Să se găsească o formulă pentru S_n.

b) Să se arate că $S_{p+q} - S_{p-q} = pq$, unde p şi q sunt numere naturale cu $p > q$.

14. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 2$, r = -3; b) $a_{10} = 131$, r = 12; c) $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$; d) $a_3 = 11$, $a_5 = 19$. Să se dea apoi formula termenului al n-lea.

15. Să se găsească termenii a_1, a_3, a_5, a_6 ai progresiei aritmetice următoare: a_1, -7, a_3, -1, a_5, a_6, 8, ...

16. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_5 = \frac{\alpha}{3}$ şi $r = \frac{10\alpha}{3}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

17. Fie (x_n) o progresie aritmetică, astfel încât $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ şi $r = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Să se determine n, ştiind că $x_n = 4\alpha + 3\beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

18. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7, \\ a_8 - a_7 = 2a_4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 120, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 15; \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12, \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18. \end{cases}$

19. Să se găsească suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 2$, $a_5 = 14$; b) $a_{10} = 50$, $r = 7$.

20. Şirul (y_n) este dat prin formula termenului al n-lea: $y_n = \alpha n + \beta$, unde α, $\beta \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că şirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său şi raţia.

21. Să se decidă dacă este progresie aritmetică un şir astfel încât pentru orice n, suma primilor n termeni este dată de formula $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$, cu α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$. În caz afirmativ, să se găsească formula termenului general.

22. Să se determine termenul al n-lea al unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_1 = \alpha$ şi $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$.

23. Să se demonstreze că, oricare ar fi trei termeni consecutivi ai şirului (a_n), dat prin formula termenului general următoare, nu sunt în progresie aritmetică:

a) $a_n = n^2$; b) $a_n = \sqrt{n}$; c) $a_n = \frac{1}{n}$.

24. Fie (a_n) o progresie aritmetică. Să se studieze dacă este progresie aritmetică şirul (b_n) al cărui termen general este dat de formula următoare:

a) $b_n = \alpha a_n$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $b_n = a_{2n}$; c) $b_n = a_n + \alpha$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$;

d) $b_n = \dfrac{\alpha}{a_n}$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; e) $b_n = a_n^2$.

25. Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, numerele $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ sunt în progresie aritmetică.

26. Să se arate că dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt în progresie aritmetică, atunci ele sunt proporţionale cu numerele 3, 4, 5.

27. Să se determine suma primilor n termeni ai şirului:

a) 1, -2, 3, -4, ... ; b) 1, -3, 5, -7, ...

28. Să se găsească termenul general al şirului 2, 4, 7, 11, ... care are proprietatea că diferenţele între termenii vecini formează o progresie aritmetică.

29. Fie a, b, c, d numere reale nenule, astfel încât: $a\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{bcd}}$, $b\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{acd}}$, $c\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{abd}}$, $d\sqrt[3]{\dfrac{d^2}{abc}}$ sunt în progresie aritmetică. Să se arate că a^2, b^2, c^2, d^2 sunt în progresie aritmetică.

30. Dacă α, β, γ sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, să se arate că ctg α, ctg β, ctg γ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă cos 2α, cos 2β, cos 2γ sunt în progresie aritmetică.

31. Se dă binomul $(a + b)^m$, unde $a = \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}$ şi $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$, logaritmul fiind în baza 10. Să se determine x, ştiind că termenul dezvoltării care conţine pe b^5 este 21, iar coeficienţii binomiali ai celui de-al doilea, al treilea şi al patrulea termen al dezvoltării binomului sunt în progresie aritmetică.

32. Să se găsească toate valorile reale ale lui a, nenule, astfel încât ecuaţia $x^8 + ax^4 + a^4 = 0$ să aibă exact patru rădăcini reale, care să fie în progresie aritmetică.

33. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n), dacă:

a) $b_1 = 3$, $q = -2$; b) $b_8 = 384$, $q = 2$; c) $b_6 = 25$, $b_8 = 9$; d) $b_3 = 20$, $b_9 = 1280$.

34. Să se găsească termenii b_2, b_3, b_5, b_6 ai progresiei geometrice următoare: $\sqrt{2}$, b_2, b_3, $12\sqrt{3}$, b_5, b_6, $216\sqrt{2}$, ...

35. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii geometrice (a_n), dacă:

a) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15, \\ a_4 - a_2 = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 + a_2 - a_4 = -159, \\ a_4 + a_1 - a_3 = 265. \end{cases}$

36. Să se decidă dacă este progresie geometrică un şir astfel încât pentru orice n, suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 + 1$; b) $S_n = 4^n - 1$; c) $S_n = 5^n - 5$.

37. Fie (b_n) o progresie geometrică. Să se studieze dacă este progresie geometrică şirul (c_n), al cărui termen general este dat de formula următoare:

a) $c_n = \beta b_n$, cu $\beta \in \mathbf{R}$; b) $c_n = b_{2n}$; c) $c_n = b_n + \beta$, cu $\beta \in \mathbf{R}$;

d) $c_n = \dfrac{\beta}{b_n}$, cu $\beta \in \mathbf{R}$; e) $c_n = b_n^3$.

38. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, cu $|a| \neq |b|$, să se arate că numerele $(a + b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a - b)^2$ sunt în progresie geometrică.

39. Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ sunt în progresie geometrică, atunci

$(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$.

40. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3$. Să se arate că numerele x, y, z sunt în progresie geometrică.

41. Să se calculeze suma

$1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \ldots + 100\cdot 2^{99}$.

42. Să se demonstreze că

$$\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\right)^2 - x^n = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1}\right)$$

43. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă numerele ab, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci numerele b, c, $2b - a$ sunt în progresie geometrică.

44. Să se găsească suma $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{\text{de n ori}}$

45. Fie (a_n) o progresie aritmetică, iar (b_n) o progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încât $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.
Să se demonstreze că $a_n \leq b_n$, pentru orice n.

46. Fie a_1, a_2, a_3 şi b_1, b_2, b_3 câte trei numere în progresie aritmetică (respectiv geometrică), astfel încât $b_1 \neq b_2$ şi $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$.

Să se arate că, dacă a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 sunt în progresie aritmetică, atunci $a_1 = b_2$ (respectiv $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$).

47. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 în progresie geometrică, astfel încât suma logaritmilor, în baza 3, a acestor numere să fie egală cu 2. Să se găsească aceste numere, ştiind că $\log_3\left(\frac{a_5}{a_3}\right) = -2$.

48. Să se găsească suma tuturor numerelor naturale, mai mici sau egale cu 1000 şi care nu se divid cu 13.

49. Suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice este egală cu 62. Dacă termenii: al cincilea, al optulea şi al unsprezecelea, ai acestei progresii sunt respectiv primul, al doilea şi al zecelea termen pentru o progresie aritmetică, să se găsească primul termen al progresiei geometrice.

50. Fie numerele reale distincte a, b, c cu $a + b + c = 124$, astfel încât acestea să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Dacă presupunem, în plus, că a, b, c sunt, respectiv al treilea, al treisprezecelea şi al cincisprezecelea termen pentru o progresie aritmetică , să se determine numerele a, b, c.

51. Suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice eate egală cu 130. Dacă presupunem, în plus, că termenii: al patrulea, al zecelea şi al şaptelea ai acestei progresii sunt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, să se determine primul termen al progresiei aritmetice.

52. Să se arate că:

a) Numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nu pot fi toate printre termenii unei progresii aritmetice.

b) Numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nu pot fi toate printre termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi.

53. Dacă a_1, a_2, ..., a_n sunt numere pozitive în progresie geometrică, să se arate că $a_1a_2 \dots a_n = \sqrt{(a_1a_n)^n}$.

54. Fie $a \in \mathbf{R}$ un număr real. Să se arate că există $b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât b să fie media aritmetică între a şi c, c să fie media geometrică între a şi b şi a să fie media armonică (a se vedea ex. 33, cap. IV) între b şi c.

55. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, un număr par de numere reale în progresie geometrică, astfel încât suma lor să fie de cinci ori mai mare decât suma termenilor de rang par. Să se găsească rația progresiei.

56. Fie (a_n) o progresie aritmetică și (b_n) o progresie geometrică, astfel încât:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 155,\ b_1 + b_2 = 9.$$

Să se determine progresiile, dacă a_1 este rația progresiei geometrice, iar b_1 este rația progresiei aritmetice.

57. Fie (a_n) o progresie aritmetică și (b_n) o progresie geometrică astfel încât:

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3 - 8$. Să se determine progresiile.

58. Fie (a_n) o progresie aritmetică cu termeni pozitivi, astfel încât $a_2 = \sqrt{a_1 a_4}$. Să se demonstreze că a_4, a_6, a_9 sunt în progresie geometrică. Să se determine rația.

59. Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}$ în progresie geometrică descrescătoare. Să se demonstreze că:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdots \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}.$$

60. După o povestire orientală, inventatorul jocului de șah solicitând recompensa s-a adresat suveranului său astfel: „Eu doresc pentru prima căsuță un bob de grâu, pentru a doua 2 boabe de grâu, pentru a treia 2^2 boabe de grâu ș.a.m.d., pentru a 64-a doresc 2^{63} boabe de grâu". Să se calculeze numărul boabelor de grâu cerute suveranului.

61. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ două șiruri de numere reale, primul având termenii în progresie aritmetică, iar al doilea în progresie geometrică. Să se arate că, dacă cele două șiruri conțin câte un termen irațional, atunci ele au o infinitate de termeni iraționali.

62. Să se arate că în triunghiul lui Pascal, suma termenilor fiecărei linii este dublul sumei termenilor liniei precedente. Să se afle suma termenilor unui triunghi al lui Pascal cu 64 de linii.

63. Dacă $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, să se găsească sumele:

I) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)^2$;

II) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n - \frac{1}{a^n}\right)^2$.

64. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive.

a) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie aritmetică, să se calculeze

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}.$$

b) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie geometrică, să se calculeze

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}+\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}.$$

65. Fie numerele pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, în progresie geometrică crescătoare şi p un număr natural nenul. Să se arate că raportul sumelor

$$S_n=\frac{1}{a_2^p+a_1^p}+\frac{1}{a_3^p+a_2^p}+\ldots+\frac{1}{a_{n+1}^p+a_n^p} \text{ şi}$$

$$S_n'=\frac{1}{a_2^p-a_1^p}+\frac{1}{a_3^p-a_2^p}+\ldots+\frac{1}{a_{n+1}^p-a_n^p} \text{ nu depinde de } n.$$

66. Un şir de numere $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ este astfel încât, oricare ar fi k, avem: $a_1 + a_2 + ... + a_k = ak^2 + bk$, unde a, b sunt numere reale date. Să se demonstreze că acest şir este o progresie aritmetică. Să se deducă în funcţie de a şi b primul termen şi raţia acesteia.

67. Să se arate că dacă n şi k sunt numere naturale cu $n \geq k + 3$, atunci C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3} nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

68. Să se găsească termenul general al şirului (a_n), definit prin:

$a_0 = a_1 = 1$ şi pentru orice $n \geq 2$ avem $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n a_n$.

69. Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ în progresie aritmetică, cu raţia r, şi fie $S_m = a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$, unde $m \in \mathbb{N}$.

a) Calculându-se diferenţele $a_{k+1}^p - a_k^p$, pentru k = 1, 2, ..., n, să se demonstreze că $a_{n+1}^p - a_1^p = C_p^1 r S_{p-1} + C_p^2 r^2 S_{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} r^{p-1} S_1 + C_p^p r S_0$, oricare ar fi $p \geq 1$, număr natural.

b) Reciproc, dacă egalitatea de mai înainte este adevărată pentru orice p şi n, atunci numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie aritmetică cu raţia r.

70. Se formează numerele $b_1, b_2, ..., b_n$, definite prin relaţia de

recurență: $b_n = \alpha b_{n-1} + \beta$, unde b_1, α, β sunt numere reale date.

a) Presupunem că $\alpha \neq 1$ și fie q rădăcina ecuației $x = \alpha x + \beta$. Să se demonstreze că numerele: $b_1 - q$, $b_2 - q$, ..., $b_n - q$ sunt în progresie geometrică. Să se deducă, de aici, expresia lui b_n în funcție de n.

b) Să se deducă o formulă pentru suma $b_1 + b_2 + ... + b_n$. Să se examineze cazul $\alpha = 1$.

71. Să se calculeze suma $S = a_1a_2a_3 ... a_k + a_2a_3a_4 ... a_{k+1} + ... + a_{n+1}a_{n+2} ... a_{n+k}$, unde (a_n) este o progresie aritmetică.

72. Să se calculeze suma $S = \frac{1}{a_1a_2 \dots a_k} + \frac{1}{a_2a_3 \dots a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1} \dots a_{n+k-1}}$, unde (a_n) este o progresie aritmetică.

73. Să se calculeze sumele:

a) $S_1 = q + 2q^2 + 3q^3 + ... + nq^n$;

b) $S_2 = q + 4q^2 + 9q^3 + ... + n^2q^n$, q fiind un număr real.

74. Fie $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$, numere în progresie aritmetică și $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$.

Să se demonstreze că $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}$.

75. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ și $(x_n)_{n\geq 1}$ șirul definit prin relația $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Fie $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ $(a_1, a_2 \in \mathbf{R})$ și r_1, r_2 rădăcinile ecuației $r^2 = ar + b$. Dacă $r_1 \neq r_2$, atunci x_n este de forma $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$, iar dacă $r_1 = r_2 = r$, atunci x_n este de forma $x_n = Ar^n + Bnr^{n-1}$, unde A și B sunt numere reale.

Capitolul XII
NOȚIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Folosind algoritmul lui Euclid să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor: a) 63; 1971; b) 285; 322; c) -10; 55; d) -72; -88; e) -45; 525; f) 720; 2860; g) 4410; 3675.

2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 160; 120; b) 180; 240; c) 1250; 200; d) 1620; 584.

3. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 5 care împărţit prin 6, 8, 9, 12 şi 16 să dea acelaşi rest 5.

4. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 6 care împărţit prin 8, 12, 20 şi 30 să dea acelaşi rest 6.

5. Să se determine numerele naturale a şi b astfel încât $a + b = 60$ şi cel mai mare divizor comun al lor este 12.

6. Să se determine numerele naturale a şi b astfel încât cel mai mare divizor comun este 6 şi cel mai mic multiplu comun este 216.

7. Să se determine numerele naturale a şi b $(a > b)$ astfel încât $a^2 - b^2 = 2880$ şi cel mai mare divizor comun al lui a şi b este 8.

8. Care este ultima cifră a numerelor: 323^{700}, 1244^{51}, 1982^{83}, 164^{41}, 194^{53}, $17^{60} + 12^{40}$, $13^{20} + 22^{30}$?

9. Care este restul împărţirii numerelor:
a) $19^{42} \times 23^{51}$ prin 7; b) $17^{36} \times 21^{41}$ prin 5?

10. Care este ultima cifră a numărului $7^{7^{7^{7}}}$?

11. Dacă $n \geq 5$, atunci ultima cifră a numărului $1! + 2! + ... + n!$ este egală cu 3. Să se deducă de aici că numărul $1! + 2! + ... + n!$ pentru $n \geq 4$ nu este pătrat perfect.

12. Fie $n \in$ N. Să se arate că restul împărţirii lui n^3 prin 7 este 0 sau 1 sau 6.

13. Fie $n \in$ N. Să se determine restul împărţirii lui $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ prin 4.

14. Să se arate că dacă $n \in$ N, fracţiile: a) $\frac{5n+3}{8n+5}$, b) $\frac{33n+4}{22n+3}$ sunt ireductibile.

15. Fie $n, a, b \in$ N. Dacă $5a - 21b = \pm 1$, atunci fracţia $\frac{21n+a}{5n+b}$ este ireductibilă.

16. Fie $a, b \in$ **Z**. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor $5a + 17b$ şi $2a + 7b$ este egal cu cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

17. Fie a şi b două numere prime. Să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor: $a + b$ şi $a - b$.

18. Fie $a, b \in$ **Z**. Să se arate că: $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ şi $7 \mid b$.

19. Să se demonstreze că dacă $n \geq 2$ atunci 3 nu divide numărul $C_n^2 + 1$.

20. Dacă $n \geq 2$, să se arate că 3 divide numărul $C_{C_n^2}^2$.

21. Să se arate că numărul $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ se divide prin 10 dacă n este impar.

22. Să se arate că: $6 \mid n^3 - n$, $30 \mid n^5 - n$, $42 \mid n^7 - n$, $6 \mid n^3 + 11n$, $60 \mid n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$, $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$, $6 \mid n(2n + 1)(7n + 1)$, $24 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

23. Fie m şi n numere naturale. Să se arate că $m!n!$ divide $(m + n)!$.

24. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $5 \mid n^2 - 3n + 6$.

25. Să se arate că numărul $\dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

26. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $7 \mid n^3 + n - 2$.

27. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $7 \mid 2^{2n} + 2^n + 1$.

28. Să se arate că: $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $11 \mid 3^{2n} + 2^{6n-5}$.

29. Să se arate că: $5 \mid 17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

30. Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, să se arate că: $170 \mid 153^n + 45^n - 28^n$.

31. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că: $7 \mid 2^n - 1 \Leftrightarrow 3 \mid n$.

32. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că 7 nu divide pe $2^n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

33. Să se determine $a \in \mathbf{Z}$, astfel încât: $11 \mid 3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

34. Să se arate că dacă n este un număr natural, atunci: $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.

35. Dacă p este un număr prim, să se arate că: $p \mid C_p^k$, pentru orice $0 < k < p$.

36. Dacă p este un număr prim, să se arate că: $p \mid 2^p - 2$.

37. Dacă numărul $a^k - 1 (a \in \mathbf{Z}$ şi $k > 1)$ este prim, atunci $a = 2$ şi k este număr prim.

38. Dacă numărul $a^n + 1$ este prim ($a > 1$ şi $n > 1$, $a \in \mathbf{N}$), atunci a este par şi n este de forma 2^m.

39. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul $3n^2 - 1$ nu se divide nici cu 3, nici cu 5 şi nici cu 7.

40. Fie a, b două numere naturale nenule. Dacă $a \mid b^2$, $b^2 \mid a^3$, $a^3 \mid b^4$, $b^4 \mid a^5$, ... atunci $a = b$.

41. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sunt de forma $4k - 1$, $k \in \mathbf{N}$.

42. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sunt de forma $6k - 1$, $k \in \mathbf{N}$.

43. Dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci numărul $E = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ este un pătrat perfect.

44. Fie $m, n \in \mathbf{N}$. Dacă $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, atunci m şi n sunt pătrate perfecte.

45. Dacă p este un număr prim, $p \geq 5$, atunci restul împărţirii lui p^2 prin 12 este 1.

46. Dacă p şi $8p^2 + 1$ sunt numere prime, atunci $8p^2 - 1$ este de asemenea număr prim.

47. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia: $x + y = xy$.

48. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

49. Să se arate că nu există numerele întregi $x > 0$ şi $y > 0$ astfel încât să avem egalitatea: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

50. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia:
$5x + 7y^2 = 1600$.

51. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia: $x = 4\left[\sqrt{x}\right]+1$.

52. Să se afle valorile numărului $n \in \mathbf{N}$ astfel încât 12 să dividă pe $n^4 - n^2 - 24$.

53. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Dacă există două numere prime distincte care îl divid pe n, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor: $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ este 1.

54. Fie p un număr natural şi $n = p^m (m > 0)$. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor: $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ este p.

55. Care sunt ultimele două cifre ale numărului 2^{999}?

56. Să se arate că suma a n numere naturale impare consecutive nu este un număr prim $(n > 1)$.

57. Dacă $n > 0$ este un număr natural, numărul $n^4 + n^2 + 1$ poate fi prim?

58. Să se demonstreze că numărul $2^{2^n} - 1$ are în descompunerea sa în factori primi cel puţin n numere prime distincte.

59. Fie $n \geq 1$ un număr natural având descompunerea sa în factori primi $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ unde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt numere prime distincte. Să se arate că numărul divizorilor (pozitivi) ai lui n este $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$.

60. Să se arate că orice număr de n cifre $(n > 1)$ este mai mare decât produsul cifrelor sale.

61. Din şirul de numere naturale $1, 2, 3, \ldots, 2n$ se aleg $n + 1$ numere.

Să se arate că în aceste $n + 1$ numere alese există două numere astfel ca unul să îl dividă pe celălalt.

62. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Dacă $6 \mid a + b + c \Rightarrow 6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

63. Dacă m, n sunt numere naturale astfel încât $m = n + 2$, să se arate că numerele $n^4 + 4$ şi $m^4 + 4$ nu sunt prime între ele.

64. Să se arate că dacă m şi n sunt numere naturale prime între ele, atunci C_{m+n}^{n} este divizibil cu $m + n$.

65. La ce putere apare 2 în descompunerile lui 50! şi 100!?

66. Fie m, n două numere naturale nenule. Să se arate că: $\pm\frac{1}{n}\pm\frac{1}{n+1}\pm\frac{1}{n+2}\pm\ldots\pm\frac{1}{n+m} \notin \mathbf{Z}$ (semnele +, respectiv - se iau oricum).

67. Să se arate că nu există pătrate perfecte de forma: $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5$, cu n număr întreg.

68. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ o rearanjare oarecare a numerelor 1, 2, 3, ..., 9. Să se arate că numărul $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_9 - 9)$ este par.

69. Să se arate că dacă $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$, cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$, atunci cel puţin unul dintre numerele a, b sau c este divizibil cu 3.

70. Să se arate că există o infinitate de numere întregi n astfel încât $4n^2 + 1$ să fie divizibil cu 5 şi cu 13.

71. Se dau 51 de numere naturale cuprinse între 1 şi 100. Să se arate că există printre acestea, două cu proprietatea că unul îl divide pe celălalt.

72. Fiind date $2^{n+1} - 1$ numere întregi, să se arate că există 2^n dintre acestea cu suma divizibilă cu 2^n.

73. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, există o infinitate de numere întregi având exact $2n$ divizori.

74. Să se arate că un număr întreg n are $4m + 2$ divizori întregi ($m \in \mathbf{N}$) dacă şi numai dacă $|n|$ este un pătrat perfect.

75. Fie n un număr prim care scris în baza 10 are toate cifrele egale cu 1. Să se arate că numărul cifrelor sale este tot un număr prim. Este adevărată reciproca?

76. Să se arate că oricare ar fi un număr natural n, există n numere întregi consecutive care să aibă fiecare cel puţin 2 divizori primi distincţi.

77. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, m, n, cu $m, n > 0$, avem: $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

78. Să se arate că între numerele n şi $n!$ există cel puţin un număr prim ($n \geq 2$).

79. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încât $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}$, atunci a şi b sunt cuburi perfecte.

80. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului 2^{30}.

81. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $39^{30} - 38^{30}$.

82. Să se determine toate soluţiile întregi ale ecuaţiei $\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(3x + \sqrt{9x^2 + 224x + 1416}\right)\right] = 1$.

83. Să se arate că, dacă a şi b sunt numere prime între ele, atunci oricare ar fi $n > ab$, există x şi y numere naturale astfel încât $n = ax + by$.

84. Să se arate că, dacă $m, n \in \mathbf{N}$ şi m este impar, atunci $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

Capitolul XIII
POLINOAME CU COEFICIENŢI COMPLECŞI. ECUAŢII ALGEBRICE

1. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f prin polinomul g dacă:

a) $f = X^5 - X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 4$, $g = X^2 - X + 3$;

b) $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 1$, $g = X^3 - X + 1$;

c) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 15X + 3$, $g = X^2 + X + 1$;

d) $f = X^8 - 3X^6 + 5X^4 - 2X^2 + 1$, $g = X^3 - 4X + 1$.

2. Aplicând schema lui Horner să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f prin polinomul g.

a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 7X + 9$, $g = X - 1$;

b) $f = 3X^5 - 4X^4 + 7X^3 + X + 3$, $g = X - 2$;

c) $f = -2X^6 + 8X^5 - 5X^4 + 3X + 7$, $g = X + 3$;

d) $f = 4X^3 + 6X^2 - 7X + 9$, $g = 2X + 1$.

3. Să se determine un polinom ce gradul doi $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ astfel încât: $f(-1) = 0, f(1) = 2, f(2) = 9$.

4. Să se determine în raport cu parametrul m, gradul polinomului $f = (m^2 + 3m + 2)X^4 + (m^3 + 2m^2 - m - 2)X^3 + (m^2 + 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 1$.

5. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 6$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}$.

6. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1$. Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}+\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$.

7. Fie polinomul $f = X^3 - 3X + 5$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$.

8. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 8$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}$.

9. Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polinom cu coeficienţi numere întregi.

I) Să se arate că dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci $f(a)$ divide numărul $f(a + f(a))$.

II) Să se arate că există un număr $a \in \mathbf{Z}$ astfel încât $f(a)$ să nu fie un număr prim.

10. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât să fie îndeplinită condiţia: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

11. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul $f = X^4 + mX^3 + 2X^2 - 8$ împărţit la $X - 2$ să dea restul 4.

12. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul $f = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 5.

13. Să se afle polinomul de gradul cel mai mic astfel încât împărţit la $X + 1$ să dea restul 2 şi împărţit la $X - 1$ să dea restul -3.

14. Să se arate că restul împărţirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)$, unde $b \neq a$, este $r = \dfrac{(X-a)f(b)-(X-b)f(a)}{b-a}$.

15. Să se arate că restul împărţirii polinomului cu coeficienţi reali $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ prin $X^2 + 1$ este polinomul $r = g(-1) + h(-1)X$ unde $g = a_0 + a_2X + a_4X^2 + a_6X^3 + a_8X^4 + ...$, iar $h = a_1 + a_3X + a_5X^2 + a_7X^3 + ...$.

16. Să se determine parametrul m astfel ca polinomul $X^4 + 4X^3 - X^2 + 6X - m$ să se dividă prin $X + 2$.

17. Să se arate că polinomul $X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 5X - 3$ se divide la $X - 1$; se cere câtul împărţirii.

18. Dacă n este un număr par, să se arate că $X + 1$ divide polinomul $(X - 1)^n - (X + 3)^n$, dar $(X + 1)^2$ nu divide pe $(X - 1)^n - (X + 3)^n$.

19. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

20. Să se arate că polinomul $nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

21. Să se arate că polinomul $X^{n+1} - X^{n+2} - 3X + 3$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

22. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n+3}$.

23. Să se arate că $X^2 + X + 1$ divide polinomul $X^{6n-1} + X + 1$.

24. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(X^4 - X - 1)^{2n+2} + (X^4 + X - 1)^{2n+5}$.

25. Să se arate că polinomul $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 - 1$.

26. Să se arate că polinomul $X^{5a_1} + X^{5a_2+1} + X^{5a_3+2} + X^{5a_4+3} + X^{5a_5+4}$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 fiind numere naturale, este divizibil prin $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

27. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

28. Să se arate că polinomul $(X - 1)^{n+3} + X^{2n+3}$ se divide la $(X^2 - X + 1)$.

29. Să se determine un polinom f de gradul cinci ştiind că $f + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$ iar $f - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.

30. Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X - 1)^m - X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

31. Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X - 1)^m + X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

32. Fie polinomul $f(x) = X^{2n} + X^n + 1 \in \mathbf{R}[X]$ unde $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că:

a) $f(x)$ se divide cu $X^2 - X + 1$ dacă şi numai dacă $n = 6q + 2$ sau $n = 6q + 4$ cu $q \in \mathbf{N}$.

b) dacă $f(x)$ se divide cu $X^2 - X + 1$, atunci $f(x)$ se divide şi cu cu $X^2 + X + 1$.

33. Să se arate că polinomul $X^{1993} + X^2 + 1$ este divizibil cu cu $X^2 + X + 1$ şi să se calculeze câtul.

34. Fie polinomul $f(x) = (X + 1)^m - (X + 1)^n \in \mathbf{R}[X]$, unde $m, n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că polinomul $f(x)$ se divide prin $X^2 + X + 1$ dacă şi numai dacă $m - n$ se divide cu 6.

35. Să se determine condiţia îndeplinită de $m, n \in \mathbf{N}$, pentru care $f(x) = (X - 1)^m - (X + 4)^n$ se divide cu $X^2 - X + 5$.

36. Să se determine polinoamele cu coeficienţi reali care satisfac relaţia: $XP(X - 1) = (X - 26)P(X)$.

37. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât: $Xf(X) = (X - 3)f(X + 1)$.

38. Să se arate că nu există nici un polinom nenul $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât: $(X - 1)f(X) = (X + 1)f(X + 1)$.

39. Există polinoame nenule $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât: $X^2 f(X) = (X - 1)^3 f(X + 1)$?

40. Să se găsească un polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât: $X^k f(X) = (X - 3)^k f(X + 1)$,

$k \geq 1$.

41. Să se determine $P(X) \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $P(0) = 0$ şi $P(x^2 + x + 1) = P(x)^2 + P(x) + 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

42. Fie $f(X)$ un polinom de gradul doi cu coeficienţi raţionali. Atunci $f(n) \in \mathbf{Z}$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ dacă şi numai dacă $f(X)$ este de forma $f(X) = \frac{1}{2}\left[cX^2 + (2b - c)X + 2a\right]$, cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

43. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor, cu ajutorul algoritmului lui Euclid:

a) $f = 6X^6 - X^5 - 6X^4 + 4X^3 + 8X^2 - 7X + 2$, $g = 2X^5 - X^4 - 10X^3 + 15X^2 - 9X + 2$;

b) $f = 5X^7 - 10X^6 + 8X^5 - 16X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 2$, $g = 5X^5 - 9X^4 - 2X^3 + 2X - 4$;

c) $f = 10X^7 + 35X^5 - 13X^4 + 15X^3 - 14X^2 + 3X$, $g = X^5 + 2X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 4X - 2$;

d) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 22X + 14$, $g = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X$;

e) $f = 2X^6 + 5X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 5X + 3$, $g = 2X^5 + 5X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 5X - 3$.

44. Să se arate că următoarele polinoame sunt prime între ele:

a) $f = X^4 + X^3 + 3X^2 + 7X + 20$, $g = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 20$;

b) $f = X^5 - 6X^4 + 8X^3 + X^2 - 6X + 8$, $g = X^4 + 7X^3 + 18X^2 + 22X + 12$.

45. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n - 1$ şi $X^m - 1$.

46. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n + a^n$ şi $X^m + a^m$.

47. Să se descompună în factori, cu coeficienţi reali, polinoamele:

a) $f = X^4 - 1$; b) $f = X^6 - 1$; c) $f = X^8 - 1$.

48. Este bijectivă funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 5x + 1$?

49. Să se descompună în factori, cu coeficienţi reali, polinomul $f = X^{2n} - 1$.

50. Să se rezolve ecuaţiile, ştiind că între rădăcini există relaţiile:

a) $4x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 26x + 12 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

b) $2x^3 - 9x^2 - mx + 75 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

c) $6x^3 - mx^2 + 64x + 12 = 0$, $x_1 = 3x_2$;

d) $x^4 - 12x^3 - 2x^2 + mx + 297 = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

e) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

f) $3x^3 - 32x^2 + 73x + 28 = 0$, $x_1 - x_2 = 3$;

g) $2x^4 + 2x^3 - 38x^2 + 22x + 60 = 0$, $x_1 + x_2 = -3$;

h) $x^4 + 10x^3 + mx^2 + 50x + 24 = 0$, $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$;

i) $x^3 + 5x^2 - 2x - m = 0$, $x_1 + x_2 = -7$;

j) $2x^3 + x^2 - 76x + 105 = 0$, $x_1 - x_2 = 12$;

k) $x^3 + \left(1-\sqrt{3}\right)x^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$, $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

51. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, să se arate că:

a) $12\left(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7\right) = 7\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2$;

b) $3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5\right) = 5\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)\left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\right)$.

52. Fie ecuaţia $x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că această ecuaţie are o rădăcină independentă de m.

b) Dacă x_2 şi x_3 sunt celelalte două rădăcini, să se determine m astfel încât $\lg\left|x_2 - x_3\right| = \frac{1}{2}\lg\left(6m+5\right)$.

53. Fie ecuaţia: $4ax^4 - 2(a^2 + a + 1)x^3 + (a^2 - 16a + 1)x^2 + 8(a^2 + a + 1)x - 4(1 + a^2) = 0$.

a) Să se arate că ecuaţia are trei rădăcini raţionale independente de a.

b) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei, să se determine a astfel încât: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{11}{2}$.

54. Fie ecuaţia $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$.

a) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, ecuaţia are o rădăcină ce aparţine intervalului $[-1, 1]$.

b) Să se determine m ştiind că ecuaţia are o rădăcină dublă.

c) Să se determine m astfel încât $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 6$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei.

55. Să se arate că ecuaţia $x^4 - (a + 1)x^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)x^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, are cel mult două rădăcini reale.

56. Să se arate că ecuaţia $x^4 + mx^3 + (2m^2 + 1)x^2 + nx + p = 0$ nu poate avea toate rădăcinile reale, unde $m, n, p \in \mathbf{R}$.

57. Se dă polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a şi b şi

să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$, ştiind că restul împărţirii lui $f(X - 1)$ la $X + 1$ este -4 şi că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ satisfac relaţia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

58. Se dă polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$. Să se determine a şi b şi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$, ştiind că restul împărţirii lui $f(X + 1)$ la $X - 8$ este 9 şi că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ satisfac relaţia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{13}{2}$.

59. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$. Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $e^{f(x)} \leq 1$.

60. Să se arate, prin inducţie după n, că rădăcinile polinomului $f = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ sunt 1, 2, ..., n.

61. Să se arate că rădăcinile polinomului:

$$f = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$$ sunt simple.

62. Să se arate prin inducţie că rădăcinile ecuaţiei $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$ sunt -1, -2, -3, ..., $-n$.

63. Fie ecuaţia $x^3 + x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine m astfel încât $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei.

64. Se consideră ecuaţiile $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ şi $y^3 + (b + c)y^2 + (c + a)y + a + b = 0$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, respectiv y_1, y_2, y_3. Să se determine a, b, c astfel încât $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3 + 1$.

65. Fie ecuaţia $x^4 + m^2x^3 + 3x + 1 = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, această ecuaţie are o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$.

66. Să se rezolve ecuaţia $x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 40x + m = 0$, ştiind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

67. Se dă polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $E(m) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în care x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

b) Să se determine valorile parametrului m astfel încât $E(m) \geq 3(x_1x_2x_3)^2$.

c) Să se determine m astfel încât polinomul f să se dividă la $X - 1$ şi

să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ în acest caz.

68. Să se arate că polinomul $f = X^4 + 12X - 5$ are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2; să se rezolve ecuaţia.

69. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$.

a) Să se determine n şi p astfel încât $X^2 + 1$ să dividă pe f.

b) Dacă g este câtul împărţirii lui f la $X^2 + 1$, să se calculeze $g(1) + g(2) + ... + g(n)$.

70. Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Să se determine a, b, c, d astfel încât $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^4$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

71. Să se arate că ecuaţia $x^3 + 3x - 2 = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$. Să se arate că celelalte două rădăcini sunt complexe.

72. Să se arate că ecuaţia $x^3 - 3x - 2\sqrt{2} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

73. Să se arate că ecuaţia $x^3 - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

74. Să se rezolve în mulţimea **C**, ecuaţia $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = 0$ ştiind că admita o rădăcină reală.

75. Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$.

a) Să se arate că nu există valori ale lui $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel ca f să se dividă la $X^3 - X$.

b) În cazul când $f(0) = f(1)$, să se determine a, b, c astfel ca polinomul f să aibă rădăcina $\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ şi în acest caz să se determine celelalte rădăcini.

76. Să se determine m şi să se rezolve ecuaţia $2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$, ştiind că are o rădăcină dublă.

77. Fie ecuaţia $x^3 + px^2 + 2p^2x + 3p^3 = 0$. Să se arate că $16\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)^3 + 27\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)^2 = 0$.

78. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere complexe satisfăcând condiţiile: $x + y + z = 0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, atunci există $a \in \mathbf{C}$ astfel încât $x^6 + y^6 + z^6 = ax^2y^2z^2$.

79. Să se determine a, b, c astfel ca aceste numere să fie rădăcinile ecuaţiei $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$.

80. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $f(\alpha) \geq 0$, pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$. Atunci există două polinoame $f_1, f_2 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $f = f_1^2 + f_2^2$.

81. Fie f un polinom cu coeficienţi întregi şi $a \in \mathbf{Z}$. Dacă $f(a)$ şi $f(a + 1)$ sunt numere impare, atunci f nu are rădăcini întregi.

82. Fie f un polinom cu coeficienţi întregi. Presupunem că f ia valoarea +1 pentru cel puţin patru numere întregi distincte. Atunci pentru orice $a \in \mathbf{Z}$, $f(a) \neq -1$. Afirmaţia rămâne adevărată dacă f ia valoarea +1 numai pentru trei numere întregi distincte?

83. Fie f un polinom nenul cu coeficienţi întregi. Dacă există cel puţin patru numere întregi distincte a, b, c, d astfel încât $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 12$, atunci $f(k) \neq 17$, $(\forall)\ k \in \mathbf{Z}$.

84. Fie f un polinom nenul cu coeficienţi întregi. Dacă există cel puţin patru numere întregi a, b, c, d distincte astfel încât $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$, să se arate că $f(k) \neq 1, 3, 5, 9, 11$, $(\forall)\ k \in \mathbf{Z}$.

85. Polinomul $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ are trei rădăcini întregi care dau resturi distincte prin împărţirea la 3. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{Z}$, $f(n)$ este divizibil cu 3.

86. Să se rezolve ecuaţiile, ştiind că admit rădăcini independente de m:

a) $x^4 + mx^3 + (2m + 3)x^2 + 3mx + 6m = 0$, $m \in \mathbf{R}$;

b) $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

87. Fie ecuaţia $x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuaţia de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:

a) $y_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{x_3 + x_1}{x_2}$, $y_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$;

b) $y_1 = \dfrac{x_2 x_3}{x_1} + 1$, $y_2 = \dfrac{x_1 x_3}{x_2} + 1$, $y_3 = \dfrac{x_1 x_2}{x_3} + 1$;

c) $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x_1^2}$, $y_2 = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}$, $y_3 = 1 + \dfrac{1}{x_3^2}$;

d) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;

e) $y_1 = x_2 x_3$, $y_2 = x_1 x_3$, $y_3 = x_1 x_2$;

f) $y_1 = \dfrac{1}{x_2 + x_3}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_1 + x_3}$, $y_3 = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$.

88. Fie ecuaţia $x^3 - 3x + 1 = 0$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuaţia de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3, unde:

a) $y_1 = x_2 + x_3 + kx_1$, $y_2 = x_1 + x_3 + kx_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + kx_3$;

b) $y_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $y_2 = x_2^2 - x_1x_3$, $y_3 = x_3^2 - x_1x_2$;

c) $y_1 = x_2^2 + x_3^2$, $y_2 = x_1^2 + x_3^2$, $y_3 = x_1^2 + x_2^2$.

89. Fie ecuaţia $x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuaţia care are ca rădăcini numerele y_1, y_2, y_3 date de $y_i = x_i^2 + x_i - 5$, $i = 1, 2, 3$.

90. Fie ecuaţia $x^3 - px + q = 0$. Să se calculeze în funcţie de p şi q expresia $E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_2^2}$.

91. Fie a o rădăcină a ecuaţiei $x^3 - x - 1 = 0$. Să se găsească un polinom nenul, cu coeficienţi întregi, care să admită rădăcina $b = 2a^2 - a$.

92. Fie ecuaţia $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$. Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei.

93. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2x^4 - x^3 + 39x^2 + 18x + 54 = 0$, dacă $x_1 = 3\sqrt{2}$;

b) $6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$, dacă $x_1 = 3i$;

c) $15x^4 + 23x^3 + 544x^2 + 828x + 144 = 0$, dacă $x_1 = 6i$;

d) $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - mx + n = 0$, $m, n, \in \mathbf{R}$ dacă $x_1 = 2 + i$;

e) $2x^6 - x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 9x - 9 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{2} + i$;

f) $x^5 - 56x^4 - 10x^3 + 560x^2 + x - 56 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;

g) $x^4 - (63 - 64\sqrt{3})x^3 - (65 + \sqrt{3})x^2 - (63 - \sqrt{3})x + 64 + 64\sqrt{3} = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{3}$;

h) $3x^3 + (3i - 4)x^2 - (4i - 1)x + i = 0$, dacă $x_1 = -i$;

i) $x^3 - 2x^2 + nx + p = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{2}$;

j) $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, dacă $x_1 = 1 + 2i$;

k) $x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$, dacă $x_1 = -2 - \sqrt{3}$.

94. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$. Să se determine m, n, p astfel ca f împărţit la $X - 1$ să dea restul -15, iar ecuaţia $f(x) = 0$ să aibă o rădăcină egală cu $-1 + i$.

95. Să se arate că dacă p, q sunt numere reale astfel încât $4p^3 +$

$+27q^2 \leq 0$, atunci rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$ sunt reale.

96. Să se rezolve ecuaţiile bipătrate:

a) $x^4 - (2m^2 - 1)x^2 + (4m^2 - 6) = 0$; b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

c) $x^4 - 20x^2 + 96 = 0$; d) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$;

e) $x^4 - (2m + 1)x^2 + m^2 + m = 0$; f) $x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0$.

97. Să se rezolve ecuaţiile reciproce:

a) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$;

b) $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = 0$;

c) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$;

d) $2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0$;

e) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;

f) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$.

98. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$x^6 - (m - 1)x^4 + (m - m^2)x^2 + 2m - m^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

99. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$x^4 + x^3 + x^2 + mx + m^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

100. Să se rezolve ecuaţia $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = ax^2$, $a \in \mathbf{R}$. Discuţie.

101. Să se rezolve ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2 = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

102. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că ecuaţia în x, $(x + z)^n - (x + \bar{z})^n = 0$ are toate rădăcinile reale.

103. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, unde $a_i \in \mathbf{R}$ $(0 \leq i \leq n)$. Dacă $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, atunci oricare ar fi rădăcina α (reală sau complexă) a lui f, avem $|\alpha| \leq 1$.

104. Fie $\mathbf{Z}[X]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi numere întregi, p un număr întreg prim şi $f, g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $p \mid fg \Rightarrow p \mid f$ sau $p \mid g$.

105. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Notăm cu $c(f)$ = cel mai mare divizor comun al coeficienţilor lui f. Dacă $f, g \in \mathbf{Z}[X]$ să se arate că $c(fg) = c(f) \cdot c(g)$.

106. *Criteriul lui Einstein*: Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ $(n \geq 1)$ un polinom din $\mathbf{Z}[X]$ astfel încât $c(f) = 1$. Presupunem că există un număr prim p astfel încât $p \mid a_i$, $(\forall)$ $0 \leq i \leq n - 1$, p nu divide pe a_n şi p^2 nu divide pe a_0. Atunci f nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

107. Dacă p este un număr prim, polinomul $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

108. Să se arate că polinomul $X^{52} + X^{51} + X^{50} + \ldots + X^2 + X + 1$ nu se

poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

109. Să se arate că polinomul $X^n - 120$ ($n \geq 1$) nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

110. Să se arate că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$, unde p este un număr prim, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

111. Să se arate că polinomul $X^{2^n} + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienţi întregi.

112. Să se determine numerele întregi a, b astfel încât polinomul $X^4 + aX^2 + bX + 1$ să se descompună în produsul a două polinoame de grad mai mic decât patru, cu coeficienţi numere întregi.

113. Să se arate că polinomul $f = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) - 1$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere întregi distincte, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame de grad mai mic decât n, cu coeficienţi întregi.

114. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ ($a, b, c \in \mathbf{Z}$) astfel încât $ac + bc$ este număr impar. Să se arate că acest polinom nu se poate scrie ca produsul a două polinoame de grad mai mic decât 3, cu coeficienţi întregi.

115. Să se arate că ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ şi $a^2 - 2b < 0$, nu are toate rădăcinile reale.

116. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_{1986}$ coeficienţii polinomului $(1 + x + x^2)^{993}$, a_k fiind coeficientul lui x^k, $0 \leq k \leq 1986$.

Să se arate că $a_0 + a_2 + \ldots + a_{1986}$ este un număr par.

117. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ numere complexe distincte şi $c_1, c_2, \ldots, c_n$, c_{n+1} numere complexe arbitrare. Să se arate că polinomul

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})\ldots(X - a_{n+1})}{(a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_{n+1})}$$

este unicul polinom de grad $\leq n$ astfel încât

$$f(a_i) = c_i,\ (\forall)\ i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

118. Fie $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ polinoame cu coeficienţi complecşi, astfel încât grad $f_i = i$, $0 \leq i \leq n$.

a) Dacă f este un polinom din C[X] astfel încât grad $f \leq n$, atunci există în mod unic numerele complexe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, astfel încât $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$;

b) Dacă $f \in$ C[X] şi $a \in$ C, să se arate că f este de forma

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{X - a}{1!} + \alpha_2 \frac{(X - a)^2}{2!} + \ldots + \alpha_n \frac{(X - a)^n}{n!},$$

unde $\alpha_i \in \mathbf{C}(0 \leq i \leq n)$.

119. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ numere complexe distincte două câte două şi $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că există un unic polinom f de grad $\leq n$ de forma $f = \alpha_0 + \alpha_1(X - a_1) + \alpha_2(X - a_1)(X - a_2) + \ldots + \alpha_n(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n)$ astfel încât $f(a_i) = c_i$, $1 \leq i \leq n + 1$.

120. Să se determine valorile lui a astfel încât ecuaţia

$$\left(x - a^2\right)\left(a(x - a)^2 - a - 1\right) + 1 = 0$$

să aibă mai multe rădacini pozitive decât negative.

121. Să se determine valorile lui a astfel încât ecuaţia

$$\left((x - a)^2 - 2a - 4\right)(x - a)^2 + 2a + 3 = 0$$

să aibă mai multe rădăcini negative decât pozitive.

122. Să se arate că ecuaţia algebrică

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

astfel încât $a_k \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \leq k \leq n$, nu are rădăcini reale de modul > 2.

123. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sunt rădăcinile diferite ale ecuaţiei $x^n - 1 = 0$, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{1 - x_1} + \frac{1}{1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{1 - x_{n-1}} = \frac{n - 1}{2}.$$

124. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, un polinom de grad n, astfel încât $f(0), f(1), \ldots, f(n)$ sunt numere întregi. Să se arate că $(\forall)\ k \in \mathbf{Z}, f(k) \in \mathbf{Z}$.

125. Să se arate că functia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x|$ nu este polinomială.

126. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, un polinom care admite o rădăcina întreagă. Să se arate pentru orice numar natural n, $f(0) f(1) \cdot \ldots \cdot f(n)$ este divizibil cu $(n + 1)!$.

Capitolul XIV
PERMUTĂRI

1. Să se calculeze $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$ dacă :

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze puterile σ, σ^2, σ^3, ... , în cazul că :

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine permutarea $x \in S_4$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze σ^{123}; σ^{210}; σ^{145}.

5. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ să se calculeze σ^{100}; σ^{151}; σ^{651}.

6. Să se determine numărul de inversiuni şi signatura pentru fiecare din permutările următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

f) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; g) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_4$, astfel încât $x^2 = u$.

8. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_7$, astfel încât $x^2 = u$.

9. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_3$, astfel încât $x^2 = u$.

10. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_4$, astfel încât $x^2 = u$.

11. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & i & 3 & j & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine i si j astfel încât σ să fie o permutare pară.

12. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & i & 2 & 8 & j & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine i si j astfel încât permutarea σ să fie impară.

13. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4.... & n & n+1 & n+2.... & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7.... & 2n-1 & 2n & 2n-2.... & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ. Să se determine n astfel încât σ să fie pară (respectiv impară).

14. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se determine toate permutările $x \in S_5$ astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

15. Fie numărul de cinci cifre $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ unde : $a_1= 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$. Să se calculeze suma $\sum\limits_{\sigma \in S_5} \overline{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)}a_{\sigma(5)}}$.

16. Fie numărul 64251. Facând toate permutările posibile ale cifrelor acestui număr obtinem 120 numere distincte. Al câtelea număr în ordinea crescătoare din cele 120 de numere ocupă numărul 64251?

17. Fie numărul 45251. Câte numere distincte obţinem permutând toate cifrele acestui număr? Să se calculeze suma tuturor acestor numere.

18. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ produsul $P_\sigma = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right)$ este maxim? (r şi s sunt două numere naturale ≥ 1).

19. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este minimă?

20. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ este minimă?

21. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{\sigma(i)}\right)^2$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{\sigma(i)}\right)^2$ este minimă?

22. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ astfel încât să avem

$$a_1 a_{\sigma(1)} < a_2 a_{\sigma(2)} < \ldots < a_n a_{\sigma(n)}.$$

23. Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n$ care au două inversiuni precum şi numărul lor.

24. Să se arate că orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziţii de forma : (1 2), (1 3), (1 4), ... ,(1 n).

25. Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Capitolul XV
MATRICE

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $f(X) = X^2 + 2X + I_3$, să se calculeze $f(A)$.

2. Fie matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $f(X) = 2X^2 - 5X + I_2$, să se calculeze $f(A) + f(B)$ şi $f(A+B)$.

3. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n.

4. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n.

5. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

7. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

8. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n.

9. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n.

10. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ să se calculeze A^n.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} A^k$.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} A^k$.

13. Să se găsească matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2 - 4X + 13I_2 = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine u şi v astfel încât $AX = XA$.

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real nenul.

Să se determine a atfel încât egalitatea $A^n = A$ să aibă loc pentru un anumit număr natural n.

16. Să se afle matricea A, astfel încât $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Să se afle matricea A, astfel încât $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} l & m \\ p & q \end{pmatrix}$ şi a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, atunci $m - l$, $p - m$, $q - p$ sunt în progresie aritmetică.

19. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cer toate matricile X care au proprietatea $XA = AX$.

20. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ 4X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & 7 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \end{cases} \quad X, Y \in M_3(\mathbf{R}).$$

21. Fie $f(x) = x^2 - 4x + 4I_3$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se determine a, astfel încât $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Fie A o matrice pătratica de ordinul 3, având elementele numere naturale. Să se determine A, astfel încât să avem egalitatea $(1\ 2\ 4)A = (3\ 1\ 2)$.

23. Fie A o matrice de tipul (4, 3) având elementele numere naturale. Să se determine această matrice, astfel încât să avem egalitatea:

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

24. Să se determine matricele $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $A^2 + A + I_2 = O_2$. Să se arate că A este inversabilă şi să se afle inversa sa.

25. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $AB = BA$. Să se arate că:

a) $A^kB^l = B^lA^k$, oricare ar fi $k, l \in \mathbf{N}$;

b) $(A + B)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i A^{m-i}B^i$ oricare ar fi $m \in \mathbf{N}^*$.

26. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Să se calculeze $(I + A)^n$ unde $n \in \mathbf{N}^*$.

27. Fie $A, B \in M_n(C)$. Notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că:

i) $[A, A] = 0$; *ii)* $[A, B] = -[B, A]$; *iii)* $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + +[C, [A, B]] = 0$, $(\forall)\ A, B, C \in M_n(C)$.

28. Cu notaţiile din problema **27**, să se arate că dacă $A, B, C \in \in M_n(C)$ atunci $[[A, B]^2, C] = 0$.

29. Fie $A \in M_n(C)$. Dacă $AB = BA$ oricare ar fi B $\in M_n(C)$, să se arate că $A = aI_n$, unde I_n este matricea unitate.

30. Să notăm cu M mulţimea tuturor matricilor de tipul (m, n) în care toate elementele sunt numerele +1 sau -1 şi astfel încât produsul numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie +1. Să se calculeze numărul elementelor mulţimii M.

31. Oricare ar fi matricile $A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_2(C)$ să se arate că

$$\sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} = 0 .$$

32. Pentru orice matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ de ordinul n, notăm cu

$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (Tr(A) se numeşte *urma matricii* A). Să se arate că:

1) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $(\forall)\ A, B \in M_n(C)$;

2) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$, $(\forall)\ \alpha \in C$ şi $A \in M_n(C)$;

3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $(\forall)\ A, B \in M_n(C)$;

4) $\mathrm{Tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$, $(\forall)\ A, B \in M_n(C)$ şi $(\forall)\ U$ inversabilă.

Capitolul XVI
DETERMINANŢI

1. Pornind de la definiţia determinantului, să se determine semnul următorilor termeni :

a)$a_{13}\, a_{24}\, a_{31}\, a_{45}\, a_{52}$; b) $a_{14}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{42}\, a_{55}$; c) $a_{16}\, a_{21}\, a_{32}\, a_{45}\, a_{53}\, a_{64}$;

d) $a_{13}\, a_{26}\, a_{32}\, a_{44}\, a_{51}\, a_{65}$.

2. Să se determine i şi j astfel încât termenul $a_{12}\, a_{2i}\, a_{34}\, a_{4j}\, a_{51}$ să intre cu semnul + în dezvoltarea determinantului de ordinul 5.

3. Care dintre produsele următoare apar în dezvoltarea determinantului de ordinul 6:

a) $a_{13}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{56}\, a_{62}$; b) $a_{13}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{45}\, a_{51}\, a_{62}$; c) $a_{12}\, a_{23}\, a_{35}\, a_{41}\, a_{52}\, a_{64}$?

4. Folosind numai definiţia deteminantului, să se determine coeficienţii lui X^4 şi X^3 în dezvoltarea următorului determinant:

$$\begin{vmatrix} 3X & -X & 1 & -1 \\ 1 & -2X & 2 & 1 \\ 3 & 2 & X & 4 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{vmatrix}.$$

5. Folosind numai definiţia deteminantului, să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a & a\dots & a \\ 0 & 2 & -a & a\dots & a \\ 0 & 0 & 3 & -a\dots & a \\ \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & n \end{vmatrix}.$$

6. Folosind numai definiţia deteminantului, să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Folosind proprietăţile determinanţilor, să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $\begin{vmatrix} a-b & \alpha-\beta & p-q \\ b-c & \beta-\gamma & q-r \\ c-a & \gamma-\alpha & r-p \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd$.

8. a) Dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul. b) Să se arate că există determinanţi nenuli de ordinul n are $n^2 - n + 1$ elemente egale.

9. Să se arate că dacă un determinant de ordinul n are $n^2 - n + 1$ elemente nule, atunci determinantul este nul.

10. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4\alpha^2 & -5\alpha & 4x \end{vmatrix} = 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

11. Se consideră $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1+\sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Să se dezvolte determinantul, punând rezultatul sub o formă mai simplă.

12. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

13. Să se arate că $\begin{vmatrix} \frac{2}{1+x^2}+2 & \frac{2}{1+x^2}+5 & \frac{2}{1+x^2}+3 \\ -2x & 1-5x & -3x \\ 4 & 7+x & 5 \end{vmatrix} = 0$.

14. Se consideră $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$, $g(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $h(x) = \sqrt{1-\sin x}$. Să se arate că oricare ar fi tripletul a, b, $c \in [0, \pi / 2]$ avem:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0.$$

15. Să se calculeze determinantul, scriind rezultatele sub formă de produs:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}.$$

16. Să se arate că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \ldots\ldots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \ldots\ldots & x_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots\ldots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n.$$

17. Dacă numerele $\overline{a_{11}a_{12}\dots a_{1n}}$, $\overline{a_{21}a_{22}\dots a_{2n}}$, $\overline{a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}}$ sunt divizibile cu N, atunci determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ este divizibil cu N.

18. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots\dots x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots\dots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots\dots a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots\dots a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$.

19. Dacă $p < m$, atunci $\begin{vmatrix} C_m^0 & C_m^1 & \dots\dots C_m^p \\ C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots\dots C_{m+1}^p \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ C_{m+p}^0 & C_{m+p}^1 & \dots\dots C_{m+p}^p \end{vmatrix} = 1$.

20. Fie ecuaţia algebrică $x^n + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots\dots + a_n = 0$ cu $a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots\dots x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots\dots x_1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots\dots x_{n-1} \end{vmatrix},$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei date.

21. Să se calculeze determinantul de ordinul n:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & c & a \end{vmatrix}, \ n \geq 3.$$

22. Să se calculeze determinanţii de ordinul n:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{vmatrix}$;b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

23. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & & 1+x_2y_n \\ & & & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0, \ n \geq 3.$$

24. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_c \cdot h_a \\ 1 & c & h_b \cdot h_a \end{vmatrix} = 0,$$

unde a, b, c sunt lungimile corespunzătoare laturilor unui triunghi, iar h_a, h_b, h_c, sunt lungimile înălţimilor corespunzătoare.

25. Fie $A, B \in M_n(\mathrm{C})$. Să se arate că $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

26. (Formula Binet - Cauchy). Fie m, n numere naturale nenule cu $m \leq n$. Atunci pentru orice două matrice A $M(m, n, \mathrm{C})$ şi B $M(n, m, \mathrm{C})$ are loc egalitatea

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} \det A_{j_1,\ldots,j_m} \det B^{j_1,\ldots,j_m},$$

unde $A_{j_1,\ldots,j_m}$ (respectiv $B^{j_1,\ldots,j_m}$) este matricea pătratică de ordinul m având m coloane (respectiv m linii) egale în ordine cu coloanele (respectiv liniile) de indici $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ale matricei A (respectiv matricei B).

27. Fie n un număr natural nenul. Atunci pentru orice două matrice $A, B \in M_n(\mathrm{C})$ are loc egalitatea

$$\det(AB) = \det A \cdot \det(B).$$

28. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere ($n \geq 2$). Atunci are loc identitatea

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 .$$

29. Dacă A este matrice cu m linii şi n coloane ($m \geq n$), atunci $\det({}^tAA) = \sum_M M^2$ unde M parcurge mulţimea minorilor de ordin n ai lui A (care sunt în număr de C_m^n).

30. Fie matricea pătratică de ordinul n, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ unde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Considerăm matricea $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ unde $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$, oricare ar fi $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$. Să se arate că $\det B = \overline{\det A}$.

31. Fie A, B două matrici pătratice de ordinul n, având elementele numere reale, astfel încât $AB = BA$. Să se arate că: $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

32. Fie matricea de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

i) Să se arate egalitatea

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0.$$

ii) Dacă există un $k \geq 2$ astfel încât $A^k = 0$, atunci $A^2 = 0$.

33. Fie $A = (a)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ şi

$$B = \begin{pmatrix} b & b & & b \\ b & b & & b \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ b & b & \ldots\ldots & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R}).$$

Să se arate că, pentru $n = 2, 3$: $\det(A + B) \cdot \det(A - B) \leq (\det A)^2$.

34. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, unde $m > n$. Să se arate că $\det(AB) = 0$. În particular, $\det(AA^t) = 0$.

35. Fie A_1, A_2, ..., A_n mulţimi finite. Notăm cu a_{ij} numărul de elemente ale mulţimii $A_i \cap A_j$, $i, j = \overline{1,n}$. Dacă A este matricea $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ să se arate că $\det(A) \geq 0$.

36. Fie $A \in M_{3,2}(\mathbf{C})$, $B \in M_{2,3}(\mathbf{C})$. Notăm $M = AB$, $N = BA$.

Presupunem că $\det M \neq 0$, $\det N \neq 0$ şi $M^2 = kM$, unde $k \neq 0$. Să se determine $\det N$ in funcţie de k.

37. Fie $A = (a)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = \max(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze det A.

38. Fie $A = (a)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = \min(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze det A.

39. Fie $A = (a)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = |i - j|$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze det A.

40. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt -1 şi +1. Să se arate că:

a) det A este un număr par ;

b) să se determine valoarea maximă (respectiv minimă) pe care o poate lua det A.

41. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt 0 şi 1. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua det A.

42. Fie $A = (a)_{1\le i,j\le n}$ o matrice pătratică de ordinul n, astfel încât $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ oricare ar fi i, j. Sa se arate că det A este un număr întreg multiplu de 2^{n-1}.

43. Să se calculeze valoarea maximă (respectiv minimă) a determinanţilor de ordinul 4 ale căror elemente sunt -1 şi +1.

Capitolul XVII
RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

1. Să se calculeze rangul matricelor :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & -12 & 10 & -7 & -1 \\ 15 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 17 \\ 4 & 12 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -7 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze rangul matricelor următoare, pentru diferite valori

ale parametrilor :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha-1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 & -4 & 5 \\ \alpha & \alpha & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 2 & 1 \\ \alpha & 1-2\beta & 3 & 1 \\ \alpha & -\beta & \beta+3 & 2\beta-1 \end{pmatrix}$

3. a) Cum se poate schimba rangul unei matrice, dacă se schimbă unul din elementele sale ?

b) Cum se poate schimba rangul unei matrice, prin schimbarea elementelor unei linii ? Dar prin schimbarea elementelor a k linii?

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Dacă A^* este matricea adjunctă a unei matrici A, să se arate că:

$$(A \cdot A^*)^n = (A^* \cdot A)^n = A^n (A^*)^n = (A^*)^n A^n,\ n \in \mathbf{N}.$$

5. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă este nenulă. În acest caz să se calculeze inversa sa.

6. Să se afle dacă matricele următoare sunt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{R}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{C}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & i \\ -i & -i & -i & 0 \end{pmatrix}$.

7. Să se afle dacă matricele următoare, de ordin n, sunt inversabile

şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor :

$$\text{a)}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \alpha_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix};\quad \text{d)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbf{R}$.

8. Să se arate că pentru o matrice nesingulară A de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n-1,2} & \ldots\ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

inversa sa $B = A^{-1}$ este de forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Fie A o matrice pătratică cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că, dacă există $k \geq 2$ astfel încât $A^k = 0$, atunci matricea $I - A$ este inversabilă şi avem:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

10. Fie A o matrice inversabilă cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

11. Fie A, B, C matrice astfel încât $AB = AC$. Sunt oare egale

matricele B şi C ? Dar dacă A este o matrice pătratică nesingulară?

12. Fie $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ şi $B \in M(n, p, \mathbb{C})$. Să se arate că $\text{rang}(AB) \leq \leq \min(\text{rang}A, \text{rang}B)$. Să se deducă de aici că, dacă $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ unde $m > n$, atunci $\det({}^tA A) = 0$.

13. O matrice $A \in M_m(\mathbb{C})$ se numeşte involutivă dacă $A^2 = I_n$. O matrice $B \in M_m(\mathbb{C})$ se numeşte idempotentă dacă $B^2 = B$. Să se arate că:

a) Dacă B este o matrice idempotentă, atunci matricea $2B - I_n$ este involutivă.

b) Dacă matricea A este involutivă, atunci matricea $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

14. Fie E_n matricea pătratică de ordin n ale cărei elemente sunt toate egale cu 1. Să se arate că:

a) $E_n^{\ 2} = nE_n$; b) $I_n - E_n$ este inversabilă şi avem

$$(I_n - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}E_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n.

15. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ de rang 1. Să se arate că:

a) Există numerele $b_1, b_2, \dots, b_m$ şi $c_1, c_2, \dots, c_n$, astfel încât oricare ar fi i, j $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ să avem $a_{ij} = b_i c_j$.

b) Matricea A se poate scrie ca produsul XY a două matrice X, Y unde $X \in M_{m,1}(\mathbb{C})$, iar $Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$.

16. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Să se arate că:

a) există un număr α astfel încât $A^2 = \alpha A$;

b) dacă $\alpha \neq -1$, atunci matricea $I_n + A$ este inversabilă şi avem :

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha+1}A.$$

Să se deducă de aici, în particular problema **5**.

17. Fie A o matrice nesingulară şi $B = XY$, o matrice de rang 1 (vezi problema **6**).Să se demonstreze că dacă matricea $A + B$ este nesingulară, inversa sa este dată de formula:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1},$$

unde $\alpha = YA^{-1}X$.

Presupunând cunoscute matricele A^{-1}, X, Y, să se calculeze numărul

înmulţirilor şi împărţirilor necesare pentru a trece de la A^{-1} la $(A + B)^{-1}$.

18. Fie A o matrice nesingulară de ordinul n şi $\overline{A}$ matricea care se obţine adugând la un element a_{ij} al lui A, numărul α. Să se determine α astfel încât $\overline{A}$ să fie inversabilă şi în acest caz să se determine inversa sa în funcţie de elementele matricei A^{-1} şi numărul α.

19. Fie A o matrice nesingulară de ordinul n, iar $\overline{A}$ matricea obţinută adăgând $a \in \mathbf{C}$ la fiecare element al său. Să se determine a pentru care matricea $\overline{A}$ este inversabilă şi în acest caz să se calculeze inversa sa în funcţie de elementele matricei A^{-1} şi numărul a.

20. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; f) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Capitolul XVIII
SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii cu ajutorul regulii lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13\alpha, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -26\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13\alpha; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 16\alpha, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 14\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 30\alpha, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = \alpha; \end{cases}$

unde α este un parametru real.

2. Să se afle valorile lui λ pentru care sistemele următoare au soluţii nenule şi în acest caz să se rezolve :

a) $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x + (1+\lambda)y + z + t = 0, \\ x + y + (2+\lambda)z + t = 0, \\ x + y + z + t = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y + z - 2t = 0, \\ 2x - 5y - 4z + 2t = 0, \\ 5x + 3y - 3z + 4t = 0, \\ 2x - \lambda y - 2z = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 13x - 5y - 6z = \lambda x, \\ 16x - 7y - 8z = \lambda y, \\ 16x - 6y - 7z = \lambda z; \end{cases}$

3. Să se decidă dacă sistemele următoare sunt compatibile şi în acest caz să se rezolve :

a) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+2y=5, \\ 2x+y=4, \\ 2x+3y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x+y-2z=\alpha, \\ x+y+z=3; \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$;

c) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+3z=-1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z+t=10, \\ x+y-z-2t=-8, \\ 5x+5y-z-4t=-4, \\ x+y+3z+4t=28. \end{cases}$

4. Să se determine relaţia dintre parametrii a şi b, pentru care sistemul următor este compatibil

$$\begin{cases} x-3y+4=0, \\ x+y-4ab=0, \\ (a^2+1)x-(2ab+1)y+b=0. \end{cases}$$

5. Să se rezolve sistemele următoare. Discuţie, după parametrii reali α şi β.

a) $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+x_3=4, \\ (\alpha+1)x_1+(\beta+1)x_2+2x_3=7, \\ x_1+2\beta x_2+x_3=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha x_1+\beta x_2+x_3=1, \\ x_1+\alpha\beta x_2+x_3=\beta \\ x_1+\beta x_2+\alpha x_3=1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (3-2\alpha)x_1+(2-\alpha)x_2+x_3=\alpha, \\ (2-\alpha)x_1+(2-\alpha)x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+(2-\alpha)x_3=1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \alpha x_1+2x_2+3x_3+3x_4=\beta, \\ (2-\alpha)x_1+(1+\alpha)x_2+3x_3+3x_4=\alpha\beta, \\ x_1+(3-\alpha)x_2+(2+\alpha)x_3+3x_4=\beta, \\ 3x_1+6x_2+9x_3+(8+\alpha)x_4=(2+\alpha)\beta. \end{cases}$

6. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca suma a două soluţii ori produsul unei soluţii printr-un număr $\alpha \neq 1$ să fie din nou o soluţie a aceluiaşi sistem de ecuaţii liniare.

7. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca o combinaţie liniară dată, de soluţii ale unui sistem neomogen de ecuaţii liniare, să fie din nou o soluţie a acestui sistem.

8. a) Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

b) Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$a_ix+b_iy+c_i=0 \ , \ 1\le i\le n.$$

9. a) Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0, \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

b) Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0 \ , \ 1\le i\le n.$$

10. Dacă $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x=by+cz+du+ev, \\ y=cz+du+ev+ax, \\ z=du+ev+ax+by, \\ u=ev+ax+by+cz, \\ v=ax+by+cz+du \end{cases}$$

să aibă soluţii nenule.

11. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} \alpha x+ay+bz+ct=0, \\ ax-\alpha y-fz+et=0, \\ bx+fy-\alpha z-dt=0, \\ cx-ey+dz-\alpha t=0 \end{cases}$$

să aibă soluţii nenule.

12. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} mx+y+z=4, \\ x+2my+z=4, \\ x+y+mz=3, \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Se cere :

a) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

b) Să se determine valorile lui m pentru care soluţia sistemului (x, y, z) satisface condţiile $x + z > y$ şi $x + y \geq z$.

c) Să se determine valorile lui m pentru care soluţia (x, y, z) a sistemului are componente pozitive.

13. Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$ o matrice oarecare. Se numaşte *polinom caracteristic* al matricei A, polinomul $P_A(X) = \det\,(XI_n - A)$. Numărul λ se numeşte *valoare proprie* a matricei A dacă ecuaţia $Ax = \lambda x$ are soluţii nenule. Orice soluţie nenulă $x \in M_{n,1}(\mathbf{C})$ a acestei ecuaţii se numeşte *vector propriu* al matricei A (corespunzător valorii proprii λ).

Să se arate că numărul λ este o valoare proprie a matricei A dacă şi numai dacă este rădăcină a polinomului caracteristic.

14. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$ o matrice, ale cărei valori proprii sunt : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Fie, de asemenea, $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_kX + a_k$ şi notăm $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_kA + a_k$. Să se arate că:

$$\det\,(f(A)) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i).$$

16. Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$ o matrice, ale cărei valori proprii le presupunem cunoscute. Să se determine valorile proprii ale matricelor:

a) A^{-1} (dacă există); b) A^2; c) A^k, pentru k număr natural;

d) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_kA + a_k$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$;

17. Fie $A \in M_n(C)$ o matrice. Să se arate că dacă x este un vector propriu al matricei A, atunci x este, de asemenea, vector propriu al matricelor:

a) A^{-1} (dacă există); b) A^2; c) A^k, pentru k număr natural;

d) $a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \dots + a_k A + a_k$, unde $a_0, a_1, \dots, a_k \in C$;

Capitolul XIX
LEGI DE COMPOZIŢIE. GRUPURI

1. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$ astfel: $x*y = x + y - xy$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

Să se arate că acestă lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

2. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $\circ$ astfel: $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

Să se arate că această lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

3. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$ prin $x*y = 2x + y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

a) Să se studieze proprietăţile acestei legi de compoziţie;

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$, să se calculeze : $a_2 = a * a$, $a_3 = a_2 * a$ şi în general, $a_k = a_{k-1} * a$. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$, număr natural, avem $a_n = (2^n - 1)a$.

4. Pe mulţimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziţie $*$, punând

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{pentru orice } x, y \in [0, +\infty).$$

a) Să se studieze proprietăţile acestei legi de compoziţie.

b) Să se arate că înmulţirea numerelor reale este distributivă faţă de aceasta.

c) Să se afle x, dacă

$$2 * x = 3.$$

5. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $\perp$, prin: $x \perp y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

Să se studieze proprietăţile acesteia.

6. Pe mulţimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziţie $\top$ astfel

$$x \top y = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

Să se studieze proprietăţile acesteia.

7. Fie $a > 0$ un număr fixat şi $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 \le x \le a\}$. Definim pe A o lege de compoziţie $\circ$ astfel

$$x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}.$$

Să se demonstreze că:

a) legea de compoziţie este asociativă;

b) dacă $x, y, z \in A$ şi $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$.

8. Pe mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ definim legea de compoziţie $*$, prin $a * b = c \Leftrightarrow c$ este restul împărţirii lui a^b la 5.

a) Să se asocieze tabelul de definiţie al acesteia;

b) Să se studieze proprietăţile legii de compoziţie.

9. Fie A o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie, notată multiplicativ, astfel încât:

a) dacă $a, b, c \in A$ şi $ab = c$, atunci $ac = b$;

b) $aa = a$, oricare ar fi $a \in A$.

Să se arate că :

a) oricare ar fi $a, b \in A$, ecuaţia $ax = b$ are soluţie unică în A;

b) dacă A este finită şi $ab \neq b$ oricare ar fi $b \neq a$, atunci aceasta are un număr impar de elemente.

10. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim legea de compoziţie $*$, punând:

$$x * y = ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se determine a, b, c astfel încât legea să fie comutativă şi asociativă.

11. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim legea de compoziţie $*$, prin:

$$x * y = xy + ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

a) Ce relaţie există între unde a, b, c pentru ca legea să fie asociativă?

b) Legea $*$ este asociativă $\Leftrightarrow$ are element neutru.

c) Există elemente nesimetrizabile?

12. Pe mulţimea **N** a numerelor naturale, definim următoarele două legi de compoziţie : $m \perp n =$ c.m.m.d.c. $\{m, n\}$ şi $m \top n =$ c.m.m.m.c. $\{m, n\}$, oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$.

Să se studieze proprietăţile acestor legi de compoziţie. Să se arate

că:

$$m \perp n (n \top p) = (m \perp n) \top (m \perp p),$$
$$m \top n (n \perp p) = (m \top n) \perp (m \top p),$$

oricare ar fi $m, n, p \in \mathbf{N}$.

13. Pe mulţimea **Z** a numerelor întregi, definim următoarele două legi de compoziţie:

$$a \top b = \max \{a\ b\} \text{ şi } a \perp b = \min \{a\ b\},$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbf{Z}$.

Să se studieze proprietăţile acestor două legi de compoziţie. Să se arate că:

$$a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c),$$
$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

14. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim două legi de compoziţie : $*$ şi $\circ$, punând

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \text{ şi } x \circ y = x + y + 1, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se studieze proprietăţile acestor două legi de compoziţie.

b) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x * y = -1, \\ x \circ y = 0. \end{cases}$$

15. Fie α, β unghiuri măsurate în radiani. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim legea de compunere $*$, prin:

$$x * y = x \cos^2\alpha + y \cos^2\beta, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$, avem :

$$(x * y) + z = (x + z) * (y + z) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}.$$

16. Fie M o mulţime cu n elemente. Câte legi de compoziţie se pot defini pe M? Câte sunt comutative dintre acestea? Câte au element neutru?

17. Pe mulţimea **C** a numerelor complexe, definim legea de compoziţie $\top$, prin

$$z_1 \top z_2 = iz_1 \cdot z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ este o parte stabilă faţa de legea $\top$, iar $\mathbf{C}^*$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

18. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim legea de compoziţie $*$, punând

$$x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1), \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $*$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

19. Pe mulţimea **C** a numerelor complexe definim legea de compoziţie $\circ$, prin:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\circ$, iar $\mathbf{C}_1$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

Să se calculeze acest grup

$$i \circ i \circ i \circ i \circ i \text{ şi } i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i.$$

20. Pe mulţimea $(0, +\infty)$ definim legea de compoziţie $\perp$, prin:

$$x \perp y = x^{\ln y}, \text{ oricare ar fi } x, y \in (0, +\infty).$$

Să se arate că mulţimea $A = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\perp$, iar A cu operaţia indusă este un grup comutativ.

21. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $\circ$, prin:

$$x \circ y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\circ$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

22. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$, prin:

$$x * y = 2(x + y - 1) - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă faţă de legea $*$, iar $\mathbf{R}_2$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

23. Pe mulţimea **Q** a numerelor raţionale definim legea de compoziţie $\circ$, prin:

$$x \circ y = x + y - \frac{xy}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{Q}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\circ$, iar $\mathbf{Q}_2$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

24. a) Să se arate că mulţimea $A = \{z \in \mathbf{C} \mid z = a - b + i(a + b);\ a, b \in \mathbf{Z}\}$ este grup în raport cu adunarea numerelor complexe.

b) Este mulţimea A parte stabilă în raport cu înmulţirea?

25. Fie k un număr natural şi $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q} \text{ şi } a^2 - kb^2 = 1\}$.

Să se determine toate numerele naturale k astfel încât H să fie parte stabilă faţă de înmulţire.

26. Fie G mulţimea matricelor din $M_3(\mathbf{R})$ de forma

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ cu } \det(M_{a,b}) = 1.$$

Să se arate că G are structură de grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

27. Să se arate că mulţimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -2y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x \neq 0,\ x^2 - 12y^2 = 1 \right\}$$ împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează un grup comutativ.

28. Fie mulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Să se arate că G împreună cu de înmulţirea matricelor este un grup necomutativ. Să se determine toate subgrupurile grupului G.

29. Există grupuri necomutative G, având proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in G$, $x^2y^2 = y^2x^2$?

30. Fie G un grup necomutativ. Dacă $a, b \in G$, astfel încât $a^{-1}ba = b^{-1}$ şi $b^{-1}ab = a^{-1}$, atunci $a^2b^2 = b^2a^2 = e$, $a^2 = b^2$ şi $a^4 = b^4 = e$.

31. Fie G un grup, notat multiplicativ, astfel încât oricare ar fi a, $b \in G$ să avem $(ab)^2 = a^2b^2$. Să se arate că G este comutativ.

Să se studieze comutativitatea unui grup $(G, *)$ cu proprietatea că $(a*b)^3 = a^3*b^3$, oircare ar fi $a, b \in G$.

32. Pe mulţimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ definim legile de compoziţie $\top$, $\perp$, în modul următor:

dacă $x = (m, a)$ şi $y = (n, b)$, atunci $x \top y = (m + n, ab)$ şi $x \perp y = (mn, a + b)$.

a) Să se studieze proprietăţile fiecăreia dintre legile definite.

b) Să se descrie elementele simetrizabile.

c) Să se studieze distributivitatea legii $\perp$ faţă de $\top$.

33. Fie n un număr întreg fixat şi

$$G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z};\ n \mid a \text{ şi } n \mid b\}.$$

Definim pe G următoarea lege de compoziţie

$(a, b) * (a', b') = (aa' + bb', aa' - bb')$, oricare ar fi $(a, b), (a', b') \in G$.

Să se decidă dacă G împreună cu această operaţie formează un grup.

34. Pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ se consideră matricea

$A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ şi fie $G = \{A_x \mid x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\}$. Să se arate că G este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

35. Fie $r \in \mathbf{R}$, $r \geq 0$ şi $A_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = r\}$.

I) Să se determine valorile lui r pentru care A_r este parte stabilă a lui $\mathbf{C}$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe şi în acest caz să se arate că A_r este grup în raport cu înmulţirea.

II) Fie M o submulţime a lui $\mathbf{C}$ stabilă la adunarea şi înmulţirea numerelor complexe, care include pe A_1. Să se arate că $\{a + bi \quad a, b \quad \mathbf{Z}\} \quad M$.

36. Fie mulţimea

$$M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Să se arate că M împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor este un grup comutativ, izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

37. Fie mulţimea

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}\right\}.$$

Sa se arate că G împreună cu înmulţirea matricelor este un grup izomorf cu grupul cu grupul cu S_3 al permutărilor de 3 elemente.

38. Fie matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze puterile: $A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots$.

b) Să se decidă dacă A este inversabiă.

c) Să se arate că mulţimea

$$G = \{A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$$

formează un grup izomorf cu grupul multiplicativ

$$H = \{\cos \frac{2k\pi}{5} + \text{i} \sin \frac{2k\pi}{5}, 1 \le k \le 5\}.$$

39. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$ astfel $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, n fiind un număr natural impar. Să se arate că $(\mathbf{R}, *)$ este un grup. Mai mult dacă $(\mathbf{R}, +)$ este grupul aditiv al numerelor reale, să se arate că funcţia

$$f: (\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{R}, *), f(a) = \sqrt[n]{a}$$

este un izomorfism de grupuri.

40. a) Fie $G_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Să se arate că G_1 împreună cu înmulţirea matricelor formează un grup comutativ.

b) Fie $G_2 = \{1, \ -1, \ \text{i}, \ -1\}$. Să se arate că G_2 împreună cu înmulţirea numerelor formează un grup comutativ.

c) Fie

$$G_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Să se arate că G_3 cu compunerea permutărilor formează un grup comutativ.

d) Să se cerceteze dacă grupurile G_1, G_2, şi G_3 sunt izomorfe.

41. Pentru orice $t \in \mathbf{R}^*$ se consideră matricea

$$M_t = \frac{1}{3t}A + \frac{1}{t^2}B, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că:

I) $G = \{M_t \mid t \in \mathbf{R}^*\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor;

II) Grupul G este izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbf{R}^*$ al numerelor reale.

42. Fie G un grup finit cu un număr impar de elemente. Să se arate că ecuaţia $x^2 = a$, $a \in G$, are soluţie unică în G.

43. Să se determine toate omomorfismele de grup de la grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ la grupul S_n al permutărilor de n elemente.

44. Să se arate că grupurile aditive (**Z**, +) şi (**Q**, +) nu sunt izomorfe.

45. Să se arate că grupurile aditive (**Q**, +) şi (**R**, +) nu sunt izomorfe.

46. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ şi $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \setminus \{0\}$ nu sunt izomorfe.

47. Fie G o mulţime nevidă înzestrată cu o operaţie asociativă (notată multiplicativ). Să se arate că G este grup $\Leftrightarrow$ ecuaţiile $ax = b$, $ya = b$ au soluţii în G, pentru orice $a, b \in G$.

48. Fie G o mulţime finită pe care este definită o lege de compoziţie asociativă, notată multiplicativ. Dacă operaţia are proprietatea că, $xy = xz \Rightarrow y = z$ şi $yx = zx \Rightarrow y = z$ oricare ar fi $x, y, z \in G$, atunci G este grup.

49. Fie (**R**; +) grupul aditiv al numerelor reale, iar $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule. Definim funcţia

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$$

prin $f(x) = \cos 2\pi x + \mathrm{i} \sin 2\pi x$. Să se arate că:

a) f este izomorfism de grupuri;

b) $\mathbf{Z} = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 1\}$;

c) $\mathrm{Im} f = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$.

50. Fie G mulţimea tuturor şirurilor $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$, unde $x_i \in \mathbf{R}$. Definim pe G operaţia $*$, astfel:

Dacă $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ şi $x = (y_1, y_2, y_3, ...) \in G$, atunci

$$x * y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ...)$$

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Definim funcţiile f, g, h, k de la G la G, astfel:

$f(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_3, x_5, ...)$; $g(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_4, x_6, ...)$; $h(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ...)$; $k(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, ...)$.

Să se arate că f, g, h, k sunt izomorfisme de grup.

c) Să se arate că $f \circ h = g \circ k = 1_G$, $g \circ h = f \circ k = 0$.

51. Fie (**Z**, +) grupul aditiv al numerelor întregi. Să se arate că:

a) dacă $n \in \mathbf{Z}$, funcţia $\varphi_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\varphi_n(x) = nx$, este un omomorfism de grupuri;

b) orice omomorfism de grupuri de la **Z** la **Z** este de acest tip;

c) există printre acestea doar două izomorfisme.

52. Fie G un grup comutativ şi să notăm cu H mulţimea

$$H = \{f \mid f : \mathbf{Z} \to G, f \text{ omomorfism de grupuri}\}.$$

Să se arate că funcţia

$$\varphi : H \to G, \varphi(f) = f(1)$$

este o bijecţie.

În particular, să se afle omomorfismele de grup de la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$.

53. Fie $(\mathbf{Q}, +)$ grupul aditiv al numerelor raţionale. Să se arate că:

a) dacă $q \in \mathbf{Q}$, funcţia $\psi_q : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $\psi_q(x) = qx$, este un omomorfism de grupuri;

b) orice omomorfism de grupuri de la $\mathbf{Q}$ la $\mathbf{Q}$ este de acest tip.

54. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este cel nul.

55. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$, $n > 0$, la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este cel nul.

56. Fie $\mathbf{Z}_m = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{m-1}\right\}$ şi $\mathbf{Z}_n = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$ grupurile aditive ale claselor de resturi modulo m, respectiv n. Fie mulţimile:

$A = \{f \mid f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n, f$ omomorfism de grupuri$\}$ şi

$B = \{\ \bar{a} \mid \bar{a} \in \mathbf{Z}_n,\ m\bar{a} = \bar{0}\ \}$. Să se arate că :

a) dacă $f \in A$, atunci $f(\hat{1}) \in B$;

b) funcţia $\varphi : A \to B$, $\varphi(f) = f(\hat{1})$, este bijectivă;

c) Să se afle, câte omomorfisme de grupuri de la $\mathbf{Z}_m$ la $\mathbf{Z}_n$ există.

57. Fie S_n grupul permutărilor de n elemente şi $A_n \subset S_n$ mulţimea permutărilor pare de n elemente. Să se arate că A_n este un subgrup al lui S_n şi să se determine ordinul său.

58. Fie G un grup cu legea notată multiplicativ si $H \subset G$ o submulţime finită nevidă a sa astfel încât, oricare ar fi $x, y \in H$ să avem $xy \in H$. Să se arate că H este un subgrup al lui G.

59. Fie H un subgrup al grupului G şi $a \in G$ un element oarecare. Să se arate că mulţimea $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ este un subgrup al lui G.

60. Fie G un grup şi H, K două subgrupuri ale sale. Atunci $H \cup K$ este subgrup $\Leftrightarrow H \subset K$ sau $K \subset H$.

61. Fie $(G, \cdot)$ un grup . Să se arate că mulţimea

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \text{ oricare ar fi } x \in G\}$$

este un subgrup al lui G. ($Z(G)$ se numeşte centrul grupului G.)

62. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $xy = yx$.

63. Fie S_n grupul tuturor permutărilor de gradul n. Dacă $n \geq 3$, să se arate că $Z(S_n) = \{e\}$ (e fiind permutarea identică).

64. Fie A_n grupul permutărilor pare de gradul n. Dacă $n \geq 4$, să se

arate că $Z(A_n) = \{e\}$.

65. Fie n un număr natural oarecare şi notăm cu

$$n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Să se arate că :

a) $n\mathbf{Z}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$;

b) orice subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este de acest tip.

66. Fie $m, n \in \mathbf{Z}$. Să se arate că:

a) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = \{mk + nl \mid k, l \in \mathbf{Z}\}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$. De asemenea, $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z}$ este un subgrup al lui $(\mathbf{Z}, +)$.

b) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = (m, n)\,\mathbf{Z}$ şi $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z} = [m, n]\mathbf{Z}$, unde (m, n) respectiv $[m, n]$ este *c.m.m.d.c.*, respectiv *c.m.m.m.c.*, al numerelor m şi n.

67. Fie G un grup finit cu legea de compoziţie notată multiplicativ şi H un subgrup al său. Pentru fiecare $a \in G$, notăm $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Să se ararte că:

i) Dacă $aH \cap bH \neq \emptyset$, atunci $aH = bH$;

ii) Oricare ar fi $a \in H$, aH şi H au acelaşi număr de elemente.

68. (Teorema lui Lagrange) Fie G un grup finit. Numărul de elemente al lui G se numeşte *ordinul* grupului şi se notează ord G. Folosind problema precedentă, să se arate că dacă H este un subgrup al lui G, atunci

$$\text{ord } H \mid \text{ord } G.$$

69. Fie G un grup finit şi $a \in G$ un element oarecare. Se numeşte *ordinul* elementului a, cel mai mic număr natural $n \neq 0$ astfel încât $a^n = e$ (e fiind elementul neutru al lui G). Notăm ordinul elementului a prin ord (a). Să se arate că :

i) Pentru orice $a \in G$, există ordinul său.

ii) Dacă m este un număr întreg astfel încât $a^m = e$, atunci ord $(a) \mid m$.

iii) Dacă ord $(a) = n$, atunci mulţimea

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

este un subgrup al lui G.

iv) Oricare ar fi $a \in G$, atunci ord $(a) \mid$ ord G.

70. Fie grupul abelian $(\mathbf{Z}_{120}, +)$. Să se găsească ordinul elementelor: $\hat{25}$, $\hat{30}$ $\hat{55}$, $\hat{45}$, $\hat{80}$ ale acestui grup.

71. Fie G un grup multiplicativ, cu elementul neutru e.

a) Dacă $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$, să se arate că G este comutativ.

b) Dacă G are proprietatea că $x^3 = e$, oricare ar fi $x \in G$, rezultă că G este comutativ?

72. Fie G un grup finit de ordin par. Să se arate că există în G un element care are ordinul 2. Dacă în plus ordinul lui G este $2n$ cu n impar să se arate că există în G cel mult n elemente de ordinul 2.

73. Fie G un grup comutativ (legea de compoziție fiind notată multiplicativ) de ordinul n. Să se arate că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul elementelor de ordinul 2 ale lui G (în cazul că nu există elemente de ordinul 2, ultimul produs se consideră egal cu elementul neutru e).

74. Folosind problema precedentă, să se demonstreze teorema lui Wilson:

Dacă p este un număr prim, atunci:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Reciproca este adevărată?

75. Folosind problema 69, să se demonstreze teorema lui Fermat:

Dacă p este un număr prim şi $a \in \mathbf{Z}$, atunci

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

76. Fie G un grup finit şi $a, b \in G$ două elemente oarecare astfel încât $ab = ba$. Dacă $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$ şi $(m, n) = 1$, atunci $\text{ord}(ab) = mn$.

77. Fie grupurile aditive $\mathbf{Z}_m = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\right\}$ şi $\mathbf{Z}_n = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\right\}$ şi considerăm mulţimea $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n = \left\{\left(\bar{x}, \hat{y}\right) \mid \bar{x} \in \mathbf{Z}_m, \hat{y} \in \mathbf{Z}_n\right\}$. Definim pe $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ operaţia definită prin:

$$\left(\bar{x}, \hat{y}\right) + \left(\bar{x}', \hat{y}'\right) = \left(\overline{x + x'}, \widehat{y + y'}\right),$$

oricare ar fi $\left(\bar{x}, \hat{y}\right), \left(\bar{x}', \hat{y}'\right) \in \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$. Să se arate că $(\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n, +)$ este un grup comutativ. Mai mult, dacă m şi n sunt prime între ele, atunci acest grup este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_{mn}$.

78. Fie G un grup finit de ordin p, unde p este un număr prim. Să se arate că G este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_p$.

79. Fie G un grup finit nu neapărat comutativ şi $x, y \in G$. Să se arate că $\text{ord}(xy) = \text{ord}(yx)$.

80. *i*) Fie mulţimea $G = \{e, a, b, c\}$, înzestrată cu o lege de compoziţie, definită prin următorul tabel

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup comutativ (numit *grupul lui Klein*).

ii) Să se arate că orice grup cu 4 elemente este izomorf fie cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_4$, fie cu grupul lui Klein.

81. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \langle 0 \rangle$ şi $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \langle 0 \rangle$ nu sunt izomorfe.

82. Să se arate că grupurile $(\mathbf{Z}[X], +)$ şi $(\mathbf{Q}[X], +)$ nu sunt izomorfe.

Capitolul XX
INELE ŞI CORPURI

1. Pe mulţimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$ definim două legi de compoziţie, prin:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$(x, y)(x', y') = (xx', xy' + x'y),$$

oricare ar fi $(x, y), (x', y') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Să se arate că în acest mod $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ devine un inel comutativ şi unitar.

2. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n. Să se determine mulţimea:

$$N = \{ \hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbf{Z}_n, \text{ astfel încât există } k \in \mathbf{N},\ \hat{x}^k = \hat{0} \}.$$

Fie, de asemenea, $I = \{ \hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbf{Z}_n$, există $k \in \mathbf{N}$, astfel încât $\hat{x}^k = \hat{x} \}$. Să se arate că $N \cap I = \{ \hat{0} \}$.

3. Fie M o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$, multimea submulţimilor sale. Pe mulţimea $\mathcal{P}(M)$ definim două legi de compoziţie în felul următor:

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A),$$
$$A \cdot B = A \cap B,$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{P}(M)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este un inel comutativ şi unitar. Mai mult, oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(M)$, avem $A + A = 0$

(elementul neutru la adunare) şi $A^2 = A$. Să se studieze cazurile particulare în care M este formată din 1, 2, respectiv 3 elemente.

4. Fie A un inel necomutativ unitar şi $a \in A$ un element astfel încât există $a' \in A$ cu $a'a = 1$ şi $a'a \neq 1$. Fie, de asemenea $M = \{b \in A \mid ba = 1\}$ şi $b_0 \in M$. Să se arate că funcţia $f : M \to M$, definită prin $f(b) = ab + b_0 - 1$ este injectivă, dar nu este surjectivă. În particular, să se deducă că M este infinită.

5. Dacă A este un inel astfel încât oriçare ar fi $a \in A$, $a \neq 0$, există $b \in A$ cu $ba = 1$, atunci orice element nenul al lui A este inversabil (A este corp).

6. Fie A un inel comutativ cu unitate şi $f, g : \mathbf{Q} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A$, două omomorfisme de inele ($f(1) = g(1) = 1_A$). Dacă $f(n) = g(n)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$, atunci $f = g$.

7. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ şi $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$. Să se arate că $\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a, n) = 1$.

8. Fie A un inel. Definim pe A legea de compoziţie $\perp$, punând:

$$x \perp y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că legea $\perp$ este asociativă şi are element neutru.

Mai mult, dacă inelul A este unitar şi $1 - x$ ($x \in A$) este inversabil, atunci x este simetrizabil faţa de legea $\perp$.

9. Fie A un inel pe care definim o nouă lege de compoziţie $*$, punând

$$x * y = xy + yx, \text{ oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că:

a) legea $*$ este comutativă, dar nu şi asociativă;

b) legea $*$ este distributivă faţă de adunare;

c) $[(x * x) * y] * x = (x * x) * (y * x)$, oricare ar fi $x, y \in A$.

10. Să se arate că mulţimea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in C \right\},$$

împreună cu legile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricelor este un domeniu de integritate.

11. Să se arate că, corpul numerelor reale nu este izomorf cu corpul numerelor complexe.

12. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate (adică, nu există $p \in \mathbf{Z}$ astfel

încât $p^2 \mid d$). Să se arate că:

a) mulţimea $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor este un inel comutativ şi unitar;

b) mulţimea $I = \left\{\begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbf{Z}\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor formează un inel comutativ şi unitar;

c) cele două inele de la punctele precedente sunt izomorfe;

d) dacă $d' \in \mathbf{Z}$ este un alt număr liber de pătrate, atunci inelele $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ şi $\mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$ sunt izomorfe $\Leftrightarrow d = d'$.

13. Prin definiţie, un *inel boolean* este un inel în care $x^2 = x$, pentru orice element x (adică, orice element este idempotent). Să se demonstreze că într-un inel boolean înmulţirea este comutativă şi $x = -x$, oricare ar fi x din inel. Să se arate că dacă elementele u, x, y ale unui inel boolean sunt astfel încât $x = uxy$, atunci $x = ux$. Mai mult, dacă x şi y sunt elemente ale unui element boolean şi $u = x + y + xy$, atunci $x = ux$ şi $y = uy$.

În general, să se arate că, pentru orice n elemente $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale unui inel boolean, există un element u al inelului astfel încât $x_1 = ux_1$, $x_2 = ux_2$, ..., $x_n = ux_n$.

14. Fie A_1 şi A_2 două inele unitare şi fie adunarea şi înmulţirea pe $A_1 \times A_2$, definite astfel:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Să se arate că $A_1 \times A_2$, cu aceste operaţii, este un inel unitar care are divizori ai lui zero. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel în funcţie de elementele inversabile ale inelelor A_1 şi A_2.

Aplicaţie

a) $A_1 = A_2 = \mathbf{Z}$; b) $A_1 = \mathbf{Z}$, $A_2 = \mathbf{Q}$; c) $A_1 = \mathbf{Z}_m$, $A_2 = \mathbf{Z}_n$.

15. Fie $m, n > 1$, numere naturale prime între ele şi inelele

$$\mathbf{Z}_m = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\right\}, \mathbf{Z}_n = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\right\},$$

$$\mathbf{Z}_{mn} = \left\{\bar{\bar{0}}, \bar{\bar{1}}, \dots, \overline{\overline{mn-1}}\right\}.$$

Să se arate că:

a) Dacă $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$, atunci $(\hat{x}, \bar{x}) = (\hat{y}, \bar{y})$;

b) Funcţia $\varphi : \mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, definită prin $\varphi(\overline{\overline{x}}) = \left(\hat{x}, \overline{x}\right)$ este un izomorfism de inele (vezi pct. c) al problemei precedente).

16. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$.

17. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}_n$.

18. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}_m$ la $\mathbf{Z}_n$.

19. Fie ecuaţia $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$, cu $\hat{a}$, $\hat{b}$ din inelul $\mathbf{Z}_n$ al claselor de resturi modulo n. Să se arate că:

i) Dacă $(a, n) = 1$, ecuaţia are o soluţie unică;

ii) Dacă $(a, n) = d > 1$ şi d nu divide b, ecuaţia nu are nici o soluţie;

iii) Dacă $(a, n) = d > 1$ şi $d \mid b$, atunci ecuaţia are d soluţii distincte.

20. Fie A un inel comutativ şi unitar, astfel încât să existe $u \in A$, $u \neq 0$ şi $u \neq 1$, cu $u^2 = u$. Fie

$$A_1 = \{ux \mid x \in A\}.$$

Să se demonstreze că A_1 este un subinel al lui A (adică, oricare ar fi $x, y \in A_1$, atunci $x - y \in A_1$ şi $xy \in A_1$) care are unitate. Să se demonstreze, apoi, că există un subinel A_2 al lui A astfel încât:

a) A_2 este unitar; b) fiecare element al lui A se exprimă ca $x_1 + x_2$ unde $x_i \in A_i$, $i = 1, 2$; c) dacă $x_1 \in A_1$ şi $x_2 \in A_2$, atunci $x_1 x_2 = 0$; d) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Să se arate că funcţia

$$f : A \to A_1 \times A_2, f(x) = (x_1, x_2), \text{ unde } x = x_1 + x_2$$

este un izomorfism de inele.

21. Fie A un inel şi $\mathbf{Z}$ inelul numerelor întregi. Considerăm $A_1 = \mathbf{Z} \times A$ pe care definim adunarea şi înmulţirea astfel:

$$(n, a) + (n', a') = (n + n', a + a'),$$
$$(n, a) \cdot (n', a') = (nn', na' + n'a + nn'),$$

pentru orice $(n, a), (n', a') \in A_1$. Să se arate că:

a) A_1 este un inel subunitar;

b) A este izomorf cu un subinel al lui A_1;

c) dacă A este un inel comutativ, atunci A_1 este comutativ. Pentru $x, y \in A$; fie $x \circ y = x + y - xy$.

Să se arate că operaţia $\circ$ este asociativă şi că $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, pentru orice $x \in A$. Identificând elementele corespunzătoare prin izomorfismul de la pct. b), să se arate că dacă $x \in A$, atunci x este simetrizabil în $(A, \circ)$ dacă şi numai dacă $1 - x$ este simetrizabil în A_1.

22. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1}, \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{2}, \\ \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{3}; \end{cases}$

cu coeficienţi în inelul $\mathbf{Z}_{12}$.

23. Să se determine

a) Matricele $X \in M_2(\mathbf{Z}_2)$ astfel încât $X^2 + I_2 = O_2$, unde O_2 este matricea nulă şi I_2 matricea unitate.

b) Matricele $X \in M_2(\mathbf{Z}_3)$ astfel încât $X^2 = I_2$, unde I_2 este matricea unitate.

24. Fie A un inel şi

$$Z(A) = \{x \in A \mid xa = ax, \text{ oricare ar fi } a \in A\}.$$

Să se arate că dacă $a^2 - a \in Z(A)$, oricare ar fi $a \in A$, atunci inelul este comutattiv.

25. Să se determine numărul structurilor de inel, neizomorfe, care pot fi definite pe o mulţime cu un număr prim de elemente.

26. Fie inelul $\mathbf{Z}[\mathrm{i}] = \{m + n\mathrm{i} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ (numit *inelul întregilor* lui Gauss). Definim funcţia

$$\varphi : \mathbf{Z}[\mathrm{i}] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\mathrm{i}) = m^2 + n^2,$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\,\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$;

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ astfel încât $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$ (formula împărţirii cu rest);

d) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ este inversabil $\Leftrightarrow z \in \{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

27. Fie inelul $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}\,] = \{m + n\mathrm{i}\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcţia

$$\varphi : \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}\,] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\mathrm{i}\sqrt{2}\,) = m^2 + 2n^2.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\,\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}\,]$;

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}\,]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}\,]$ astfel încât $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ este inversabil $\Leftrightarrow z \in \{-1, 1\}$.

28. Fie inelul $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcţia

$$\varphi : \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\sqrt{2}\,) = |m^2 + 2n^2|.$$

Să se arate că: a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\,\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$;

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ astfel încât $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ are o infinitate de elemente inversabile.

29. Să se arate că inelul $\mathbf{Z}_n$ este corp dacă şi numai dacă n este prim.

30. Să se arate că orice inel integru finit este corp.

31. Să se arate că mulţimea

$$K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$$

împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale este un corp comutativ.

32. Pe intervalul $K = (0, +\infty)$ se definesc operaţiile algebrice:

$x \oplus y = xy$ şi $x \odot y = x^{\ln y}$, oricare ar fi $x, y \in K$. Să se arate că:

I) $(K, \oplus, \odot)$ este un corp comutativ.

II) Corpul $(K, \oplus, \odot)$ este izomorf cu corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale.

33. Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{Q}$ al numerelor raţionale.

34. Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{R}$ al numerelor reale.

35. Să se determine automorfismele f, ale corpului $\mathbf{C}$ al numerelor complexe, cu proprietatea că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

36. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate. Să se arate că :

a) muţimea $\mathbf{Q}[\sqrt{d}\,] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ împreună cu adunarea şi înmuţirea numerelor complexe este un corp comutativ;

b) mulţimea $K = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Q\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor formează un corp comutativ;

c) cele două corpuri de la punctele precedente sunt izomorfe.

37. Fie K un corp comutativ şi $K^* = K \setminus \{0\}$. Să se arate că grupurile $(K, +)$ şi $(K^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

38. Fie K un corp comutativ având proprietatea că, pentru orice $x \in K$ avem $x^2 + 1 \neq 0$. Definim adunarea şi înmulţirea pe $K \times K$, punând

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \times K$.

Să se arate că mulţimea $K \times K$, împreună cu aceste operaţii, este un corp comutativ, corpul K fiind izomorf cu un subcorp al acestuia. Mai mult, în acest corp ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ are soluţii. Există corpuri K finite cu proprietatea că $x^2 + 1 \neq 0$, oricare ar fi $x \in K$?

39. Să se determine rangul matricei

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & -\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \alpha & \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{Z}_5).$$

Discuţie după $\alpha \in \mathbf{Z}_5$.

40. Să se determine $\alpha \in \mathbf{Z}_3$ astfel încât matricea

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \alpha \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \alpha & \hat{1} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z}_3).$$

să fi inversabilă. În acest caz să se afle inversa.

41. Fie corpul $\mathbf{Z}_3$ şi multimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ 0 & \hat{1} & c \\ 0 & 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \text{ a, b, c } \in \mathbf{Z}_3 \right\}$$

Să se arate că G împreună cu înmulţirea matricelor este un grup necomutativ. Câte elemente are acest grup?

42. Să se rezolve sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} \hat{2}x + y + z = \hat{4}, \\ x + y - z = \hat{0}, \\ \hat{4}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = \hat{1}, \\ \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{1}, \\ -x - y + \hat{3}z = \hat{1}, \end{cases}$

cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_5$.

43. Să se rezolve şi să se discute sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \left(\hat{3}\alpha - \hat{2}\right)x_1 + \left(\alpha - \hat{1}\right)x_2 + \left(\alpha + \hat{4}\right)x_3 + \alpha x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + \left(\alpha + \hat{4}\right)x_2 + \left(\alpha - \hat{1}\right)x_3 + \left(\alpha + \hat{3}\right)x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \left(\hat{2}\alpha + \hat{1}\right)x_3 + \left(\hat{2}\alpha - \hat{1}\right)x_4 = \hat{1}. \end{cases}$$

cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_5$.

44. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \hat{2}x+\hat{3}y+\hat{3}z=\hat{2} \\ \hat{6}x+\hat{4}y+\hat{2}z=\hat{6} \\ \hat{3}x+\hat{2}y+\hat{4}z=\hat{3} \end{cases}$$

în inelul $\mathbf{Z}_{12}$.

45. Să se deducă în corpul $\mathbf{Z}_p$ ($p \neq 2$, număr prim) formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul al doilea

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a, b, c \in \mathbf{Z}_p, a \neq 0).$$

46. Fie polinoamele:

a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$; b) $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$;

c) $X^5 + 1 \in \mathbf{Z}_3[X]$; c) $X^4 - 1 \in \mathbf{Z}_7[X]$.

Să se decidă dacă polinoamele date sunt sau nu reductibile, iar în acest caz afirmativ să se descompună în factori primi.

47. Să se detemine a astfel încât polinomul

$$\hat{2}X^3+\left(a+\hat{2}\right)X+\hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X] \text{ să fie ireductibil.}$$

48. Să se arate că polinomul $X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbf{Z}_7[X]$ este reductibil pentru orice $a \in \mathbf{Z}_7$.

49. Să se determine numărul structurilor de inel unitar care pot fi definite pe grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$ şi să se arate că oricare două astfel de inele sunt izomorfe.

50. Fie p un număr prim, $p > 2$ şi $n = p^k$, $k \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se determine elementele $x \in \mathbf{Z}_n$ pentru care $x^2 = \hat{1}$;

b) Să se arate că produsul elementelor inversabile din inelul $\mathbf{Z}_n$ este $-\hat{1}$;

c) Să se arate că $\dfrac{\left(p^2\right)!}{p!}+p^p$ se divide cu p^{p+2}.

51. Fie A un inel comutativ şi unitar. Un element $a \in A$ se numeşte *nilpotent* dacă există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $a^n = 0$. Să se arate că suma dintre un element inversabil şi un element nilpotent este element inversabil în A.

52. Fie A un inel comutativ şi unitar. Să se arate că un polinom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ din $A[X]$ este inversabil în $A[X]$ dacă şi numai dacă a_0 este

inversabil în A și $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt elemente nilpotente.

53. Fie A un inel comutativ și $f \in A[X]$. Să se arate că f este divizor al lui zero în $A[X]$ dacă și numai dacă există $a \in A$, $a \neq 0$, astfel încât $af = 0$.

54. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbf{Z}[X]$ și p un număr natural prim astfel încât p nu divide a_n. Să se arate că dacă

$$\hat{f} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + \dots + \hat{a}_n X^n \in \mathbf{Z}_p[X]$$

este ireductibil, atunci f este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$.

55. Fie polinomul $f(X) = aX^4 + bX^2 + cX^2 + dX + e$ cu coeficienți întregi astfel încât a, b, e sunt numere impare, iar c, d sunt pare. Să se arate că $f(X)$ este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$.

56. Fie K un corp comutativ. Notăm cu $GL_n(K)$ mulțimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din K. Să se arate că:

a) $GL_n(K)$ împreună cu înmulțirea matricelor este un grup;

b) dacă K este un corp finit având q elemente, atunci $GL_n(K)$ are $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1})$ elemente;

c) $GL_2(Z_2)$ este izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente.

57. Să se arate că inelele de polinoame $\mathbf{R}[X]$ și $\mathbf{C}[X]$ nu sunt izomorfe.

58. Fie A un inel, nu neapărat comutativ, astfel încât, dacă $x^n = 0$ pentru un oarecare $x \in A$ și $n \in \mathbf{N}$, atunci $x = 0$. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ astfel încât $x_1 x_2 \dots x_n = 0$, atunci:

a) oricare ar fi i, $x_1 \dots x_n x_1 \dots x_{i-1} = 0$;

b) oricare ar fi $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, $k \leq n - 1$, să se arate prin inducție după k, că avem $x_1 a_1 x_2 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_n = 0$;

c) oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, avem $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} = 0$.

Capitolul XXI
PROBLEME PENTRU CONCURSURILE DE MATEMATICĂ

1. Fie șirul de mulțimi și funcții:

$$\dots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_4} A_3 \xrightarrow{f_3} A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0.$$

Dacă mulțimile A_i sunt finite, oricare ar fi $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, există un șir de elemente $(x_n)_{n\geq 0}$, unde $x_n \in A_n$ ($n \geq 0$), cu proprietatea că $f_n(x_n) = x_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

2. Fie $f: [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie cu proprietatea :

(1) $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in [0, 1]$.

Să se arate că $f \circ f = f$.

Să se dea exemplu de funcţie cu proprietatea (1) care să fie diferită de funcţia nulă şi de cea identică.

3. Fie a, b, α, β numere reale şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o funcţie oarecare. Dacă $\alpha^2 \neq \beta^2$ să se detemine funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât să avem

$$\alpha f(a + x) + \beta f(b - x) = g(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

4. Fie a_0 un număr natural. Definim mulţimea

$A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, unde $a = \sqrt{a_0^2 + 1}$, ..., $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$.

Să se arate că mulţimea $A \setminus \mathbf{Q}$ este infinită.

5. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] \text{ este impar.}$$

6. Să se determine mulţimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ şi } \sqrt{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z}\}.$$

7. Fie k un număr real. Să se determine valorile lui k, astfel încât ecuaţia

$$| x + 1 | - | x - 1 | = kx + 1$$

să aibă soluţie unică.

8. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$, să se arate că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

9. Dacă $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, să se arate că

$$\max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2 - 3b}.$$

10. Să se arate că, dacă $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$, atunci $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$, m şi $n \neq 0$ fiind numere naturale.

11. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale astfel încât $a_1 < a_2 < .... < a_n$. Să se arate că

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} < \frac{a_{k+1} + ... + a_n}{n - k}.$$

12. Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural n, astfel încât

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq n(x^4 + y^4 + z^4),$$

oricare ar fi numerele reale x, y, z.

13. Dacă $m \leq n$ sunt numere naturale nenule, să se calculeze

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} max\,(i,\ k).$$

14. Să se calculeze

$$S = \sum_{k=1}^{n^2} \left[\sqrt{k}\right].$$

15. Să se determine toate numerele reale m, astfel încât să avem

$$(m - 1)x^2 - mx - 2 > 0,$$

oricare ar fi $x > 2$, real.

16. Numerele a, b, c din **R** sunt astfel încât $|\ ax^2 + bx + 1\ | \leq 1$ pentru $|\ x\ | \leq 1$. Să se demonstreze că $|\ cx^2 - bx + a\ | \leq 2$ pentru $|\ x\ | \leq 1$.

17. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

să aibă o infinitate de soluţii.

18. Să se determine numerele reale a, b astfel încât ecuaţia

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

să aibă soluţie unică.

19. Să se rezolve în **R**, sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{a}{x_1}\right), \\ x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{a}{x_2}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right), \\ x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right). \end{cases} \qquad (a > 0)$$

(Generalizare a problemei **126.**, cap. V)

20. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}.$$

21. Să se demonstreze că, pentru $x \geq 1$, avem

$$[\log_2 x - \log_2 [x]] = [\log_2 x] - [\log_2 [x]].$$

22. Fie numerele pozitive $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$, în progresie aritmetică crescătoare. Să se arate că

$$\frac{n}{a_1a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} < \frac{n}{a_0a_{2n}}.$$

23. Fie funcţia $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ având proprietăţile următoare:
a) $f(2) = 2$; b) $f(mn) = f(m)f(n)$, oricare $m, n \in \mathbf{N}$; c) $f(m) > f(n)$, dacă $m > n$. Să se arate că $f = 1_{\mathbf{N}}$.

24. Fie M o mulţime cu n elemente. Considerăm ecuaţiile:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = M,$$
$$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k = \varnothing,$$

unde $k \geq 1$ este un număr natural, iar $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sunt submulţimi ale lui M.

Să se demonstreze, prin inducţie, că numărul soluţiilor $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ale problemei (1), respectiv ale ecuaţiei (2), este egal cu $(2^k - 1)^n$ (vezi problema **33**, cap. X).

25. La o bibliotecă există două registre. Fiecare cititor înscrie în primul registru numărul de cititori pe care i-a întâlnit în sala de lectură şi în al doilea înscrie numărul de cititori care au rămas după plecarea lui. Să se arate că la ora închiderii în cele două registre sunt înscrise aceleaşi numere, eventual în altă ordine.

26. Să se demonstreze că, dacă $n > 2$ este un număr natural, atunci 2^{2n} divide pe $C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$.

27. Să se decidă care dintre numerele $5^{\sqrt{6}}$ şi $6^{\sqrt{5}}$ este mai mare.

28. Să se arate că primele 100 de cifre după virgulă ale numărului $\left(\sqrt{26}+5\right)^{101}$ sunt toate zero.

29. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} C_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

30. La o serbare participă b băieţi şi f fete. Se ştie că orice grup de m băieţi cunoaşte cel puţin m fete ($m < b, f$). Să se arate că există posibilitatea ca fiecare băiat să danseze cu o fată pe care o cunoaşte.

31. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n, astfel încât $n \mid 2^n + 1$.

32. Să se determine toate numerele prime p, cu proprietatea că $p \mid 2^p + 1$.

33. Să se arate că oricare ar fi n avem n nu divide $2^n - 1$.

34. Să se arate că oricare ar fi $p > 2$, număr prim, există o infinitate de numere naturale n, astfel încât $p \mid n \cdot 2^n + 1$.

35. Să se arate că şirul $\{2^n - 3\}_n$ are o infinitate de termeni care se divid cu 5, o infinitate de termeni care se divid cu 13, dar nici un termen al său nu se divide cu $5 \cdot 13$.

36. Fie a, b, c, d, e numere întregi. Să se arate că, dacă $9 \mid a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$, atunci $3 \mid abcde$.

37. a) Fie a, b numere întregi cu $a \neq b$. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $(a + n, b + n) = 1$; b) Fie a, b, c numere întregi distincte. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, astfel încât $a + b$, $b + n$, $c + n$ să fie prime între ele două câte două.

38. Să se arate că, dacă p este un număr prim ≥ 2, atunci $p \mid C_{2p}^{p} - 2$.

39. Să se determine numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_9$ astfel încât

$$3^{x_1} + 3^{x_2} + \ldots + 3^{x_9} = 19683.$$

40. Să se arate că dacă $n \geq 1$ numărul $2^{2^{n+1}} + 3$ nu este prim.

41. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci

$$11 \mid 2^{2^{4n+2}} + 7.$$

42. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci

$$29 \mid 2^{2^{6n+2}} + 13.$$

43. Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei

$$3^x + 4^x = y^2,$$

în mulţimea numerelor întregi.

44. Fie polinoamele $p(X) = aX^2 + bX + c$ şi $q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ cu coeficienţi reali astfel încât pentru orice $x \in \mathbf{R}$, să avem $q(p(x)) = x$. Să se determine $p(q(X))$.

45. Să se determine toate polinoamele cu coeficienţii +1 şi -1, care au numai rădăcini reale.

46. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere întregi distincte, să se arate că polinomul

$$(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) + 1$$

nu se poate scrie ca produsul a două polinoame neunitare cu coeficienţi întregi.

47. Fie polinoamele $P(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{m-1}$, $Q(X) = X^{u_1} + X^{u_2} + \ldots + X^{u_n}$, unde $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ sunt numere întregi.

Pentru $k \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$, fie n_k numărul acelor i $(1 \leq i \leq n)$,

pentru care restul împărţirii lui a_i la m este k. Să se demonstreze că $P(X)$ divide $Q(X)$ dacă şi numai dacă $n_0 = n_1 = ... = n_{m-1}$.

48. Fie $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polinim de grad ≥ 1. Să se că mulţimea divizorilor primi ai numerelor $P(n)$, $n \in \mathbf{N}$, este infinită.

49. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiuni al lui σ. Să se calculeze suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma).$$

50. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice cu 4 linii şi 7 coloane astfel încât $a_{ij} \in \{0, 1\}$, oricare ar fi i, j. Să se arate că există $m < n$ şi $p < q$ astfel încât $a_{mp} = a_{mq} = a_{np} = a_{nq}$.

51. Fie $n \in \mathbf{N}$ şi $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Să se determine cel mai mare termen al dezvoltării binomului $(a + b)^n$.

52. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1327 & 1443 & 2899 \\ 4303 & 4174 & 1599 \\ 1716 & 1352 & 1704 \end{pmatrix}.$$

Să se decidă dacă det A este nenul.

53. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ cu $A^2 = A^3$ şi $A + B = I_n$. Să se arate că $I_n + AB$ este inversabilă, unde I_n este matricea unitate din $M_n(\mathbf{C})$.

54. Fie G un grup şi H, K două subgrupuri ale sale. Să se arate că, dacă există $a, b \in G$ astfel încât $aH = bK$, atunci $H = K$.

55. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ şi $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nu sunt izomorfe.

56. Fie G un grup astfel încât singurul automorfism al său să fie cel identic. Să se arate că G este comutativ şi oricare ar fi $x \in G$, $x^2 = e$.

57. Fie H un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ al numerelor raţionale. Să se arate că, dacă $\mathbf{Q} = H + \mathbf{Z}$ (unde $H + \mathbf{Z} = \{h + n \mid h \in H, n \in \mathbf{Z}\}$), atunci $H = \mathbf{Q}$.

58. Fie G un grup şi $a, b \in G$ astfel încât $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

59. Fie G un grup şi $a, b \in G$ astfel încât $a^2 = e$, $aba^{-1} = b^n$, unde $n \geq 2$ este un număr natural.

Să se arate că

$$b^{n^2-1} = e.$$

60. Fie G un grup şi $a, b \in G$ astfel încât $a^m = e$, $aba^{-1} = b^k$, unde

$m \neq$) şi $k \geq 2$ sunt numere naturale. Să se arate că $b^{k^m-1} = e$.

61. Dacă G este un grup abelian, să se determine morfismele de grup de la grupul de permutări S_n la G ($n \geq 1$).

62. Fie G un grup finit cu cel puţin două elemente şi $S \subset G$ un sistem minimal (în sensul cardinalului) de generatori ai săi. Să se arate că $\text{ord}(G) \geq 2^{|S|}$, unde $|S|$ înseamnă numărul de elemente al lui S. (S este un sistem de generatori ai lui G dacă orice element din G este produs finit de elemente şi de inverse de elemente din S).

63. Pe mulţimea **R** a numerelor reale considerăm *distanţa* $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $d(x, y) = |x - y|$. Numim izometrie a lui **R** o funcţie bijectivă $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Vom nota cu Izom (**R**) mulţimea izometriilor lui **R**.

i) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcţia $\tau_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\tau_a = x + a$. Să se arate că τ_a este o izometrie (care se numeşte *translaţie*), $\tau_1^n = \tau_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

ii) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcţia $\varepsilon_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varepsilon_a = a - x$. Să se arate că ε_a este o izometrie (care se numeşte *reflexie*), iar $\varepsilon_a^2 = 1_R$, $\varepsilon_a \circ \tau_b = \tau_{-b} \circ \circ\, \varepsilon_a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

iii) Să se arate că orice izometrie a lui **R** este o translaţie sau o reflexie;

iv) Să se arate că (Izom (**R**), $\circ$) este un grup necomutativ.

Mai mult, dacă notăm $T = \{\tau_a\}_{a \in \mathbf{R}}$. să se arate ca ($T$, $\circ$) este un subgrup al grupului (Izom (**R**), $\circ$) şi este izomorf cu grupul aditiv (**R**, +) al numerelor reale.

64. În definiţia unui inel (nu neapărat comutativ) cu unitate, să se arate că axioma de comutativitate a operaţiei de adunare este o consecinţă a celorlalte axiome ale inelului.

65. Fie A un inel (necomutativ) cu unitate, iar $a, b \in A$. Să se arate că, dacă $1 - ab$ este inversabil, atunci şi $1 - ba$ este inversabil.

66. Fie A un inel cu unitate şi $a, b \in A$ astfel încât a, b, $ab - 1$ sunt inversabile. Să se arate că elementele $a - b^{-1}$ şi $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ sunt inversabile. Mai mult, are loc egalitatea

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a.$$

67. Fie K un corp (comutativ sau nu), iar K_1, K_2, K_3 subcorpuri ale lui K astfel încât $K_i \neq K$ oricare ar fi $i = \overline{1, 3}$. Să se arate că $\bigcup_{i=1}^{3} K_i \neq K$.

68. Fie K şi K' două corpuri comutative şi $\varphi : K \to K'$ o aplicaţie

astfel încât $\varphi(1) = 1$. Să se arate că φ este omomorfism de corpuri dacă şi numai dacă:

i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$;

ii) $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, oricare ar fi $x \in K, x \neq 0$.

69. Fie H mulţimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se arate că H, înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor, este un corp necomutativ. Mai mult, ecuaţia $x^2 + I_4 = 0$ are o infinitate de soluţii în H.

70. Fie $M_2(\mathbf{C})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul al doilea cu elemente din $\mathbf{C}$. Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$, notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că :

i) $[A, B]^2$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbf{C})$.

ii) Dacă $A, B, C, D \in M_2(\mathbf{C})$, atunci matricea $[A, B]\,[C, D] + [C, D]\,[A, B]$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbf{C})$.

71. Fie A un inel unitar cu proprietatea că $x^6 = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

72. Fie A un inel unitar cu proprietatea că $x^{12} = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

73. Fie A un inel astfel încât $x^3 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

i) Să se calculeze $(x^2yx^2 - x^2y)^2$ şi $(x^2yx^2 - yx^2)^2$, unde $x, y \in A$;

ii) Să se arate că A este inel comutativ.

Partea a II-a
INDICAŢII. SOLUŢII. RĂSPUNSURI

Capitolul I
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) falsă; e) adevărată; f) falsă; g) adevărată. 2. a) adevărată; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) adevărată; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) adevărată; j) falsă; k) falsă. 5. a) adevărată; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) falsă; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) falsă. 6. Se arată că propoziţia $(\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y)$ este adevărată şi propoziţia $(\exists x)\ (\forall y)\ p(x, y)$ este falsă. 7. La fel ca la exerciţiul 6. 8. a) adevărată; falsă; adevărată; falsă; falsă; falsă; b) falsă; adevărată; adevărată; adevărată. 9. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) adevărată; e) falsă.

Capitolul II
MULŢIMI

1. a) $\{7\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-1, 2\}$ d) $\{-1\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; f) $\{1\}$; g) $\varnothing$; h) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$; i) $\left\{-1+\sqrt{6,3}\right\}$; j) $\varnothing$; k) $\{-2, 1, 3\}$; l) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; m) $\varnothing$; n) $\{0,3\}$; p) $\{1\}$; q) $[4, +\infty)$. 2. $A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. 3. a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $E = \{3, 4\}$. 4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$. 5. $A = \{1, 2, 3, 9\}$, $B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$. 7. Sunt toate submulţimile mulţimii $\{b, d, e\}$, deci în total 8 submulţimi. 8. $M = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. 9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 10. $X = \{3, 5, 7, 9\}$. 11. $X = \{4, 5, 6\}$. 12. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$. 15. Sunt 9 soluţii. 16. Folosim complementara $C_E \varnothing = C_E(X \cap Y) \Rightarrow E = C_E X \cup C_E Y$ şi revenim la problema 15. 17. a) $\{-7, 1, 5, 13\}$; b) $B = \{3\}$. 18. Scriem $x = 2n - 1 + \frac{n+8}{3n+1}$. Trebuie ca $3n + 1$ să dividă pe $n + 8$. Deci $3n + 1$ divide $3(n + 8) - (3n + 1) = 23$. Deci $3n + 1 = \pm 1$; $3n + 1 =$

$= \pm 23$. Obţinem $A = \{-17, 7\}$. **19**. Avem $a^2 - a + 1 = ax + x \Rightarrow a^2 - a(1 + x) + 1 - x = 0$. Punem condiţia ca $\Delta = (1 + x^2) - 4(1 - x) \geq 0$. Obţinem că mulţimea dată este egală cu cu $\left(-\infty, -3-2\sqrt{3}\right] \cup \left[-3+2\sqrt{3}, +\infty\right)$.

20. $x = 3+\frac{6n-2}{n^2+1}$. Dacă $n \geq 6$, atunci avem $n^2 + 1 > 6n - 2$. Deci trebuie ca $n \leq 5$. Obţinem $A = \{1, 5\}$. **21**. $\{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\}$. **22**. $y = 2 - x$ şi obţinem ecuaţia $|x| - 2|2 - x| = -1$, $A = \{(5, -3); (1, 1)\}$. **23**. Fie $d = (a, b)$; $a = da'$; $b = db'$, unde a' şi b' sunt numere prime între ele; $ab = d^2a'b' = 144a'b' \Rightarrow a'b' = 15 \Rightarrow a' = 1, b' = 15; a' = 3, b' = 5; a' = 5, b' = 3; a' = 15, b' = 1$. Deci $A = \{(12, 180), (30, 60), (60, 36), (180, 12)\}$. **24**. Scriem $(3y - (x + 1))(3y + (x + 1)) = 32$. Rezultă că $3y - (x + 1)$ poate lua valorile 1, 2, 4. Deci $3y + (x + 1)$ ia valorile 32, 16, 8. Mulţimea căutată este: $\{(6, 3), (1, 2)\}$. **25**. Este intervalul $(1, 2)$. **26**. Scriem $(x - y)^2 + 2y^2 = 8$. Obţinem că $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$. Mulţimea căutată este $\{(-2, -2), (2, 2)\}$. **28**. Scriem $3y = 1980 - x \Rightarrow y = 660 - \frac{x}{3} \Rightarrow y = 660 - k$, unde $0 \leq k \leq 660$. Deci mulţimea dată are 661 elemente. **29**. $3y = 1980 - 4x \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 660 - 4\frac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow y = 660 - 4k$. Cum $y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 4k \leq 660 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq k \leq 165$. Deci mulţimea dată are 166 elemente. **30**. $\{(0, 1976), (494, 494), 1976, 0)\}$. **31**. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$. Cum $A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}$, avem singurele posibilităţi $x_1 = -1, x_2 = 4$ sau $x_1 = 1, x_2 = 2$. Deci $m = -4$ sau $m = 2$. Rezultă $n = -3$, $p = 2$ sau $n = -3$ şi $p = -4$. **32**. $a = -1$ şi $a = -\frac{1}{4}$. Pentru $a = -1$ avem $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{5}{8}\right\}$, iar pentru $a = -\frac{1}{4}$ avem $\left\{-\frac{1}{20}, 0, \frac{1}{12}\right\}$. **33**. $x = \frac{a^2+a+m}{a+1} \Rightarrow a^2 + a(1 - x) + m - x = 0$. Cum $a \in \mathbf{R}$, atunci discriminantul acestei ecuaţii trebuie să fie ≥ 0. Deci $\Delta = x^2 + 2x + 1 - 4m \geq 0$. *Discuţie:* Dacă $m < 0$ atunci $\Delta > 0$ oricare ar fi x. Deci $A_m = \mathbf{R}$, $\forall m < 0$. Dacă $m = 0$ atunci $\Delta = (1 + x^2) \geq 0$. Dar $x = -1$ nu este de forma $\frac{a^2+a}{a+1}$,

($a \in \mathbf{R}$). Deci $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$. Dacă $m > 0$, atunci $A_m = \left(-\infty,\ -1-2\sqrt{m}\right) \cup$ $\cup \left(-1+2\sqrt{m},\ +\infty\right)$. Se constată uşor că intersecţia mulţimilor A_m când m parcurge numerele reale pozitive este vidă. **34**. Dacă mulţimea ar fi nevidă, există fracţia ireductibilă $x = \frac{p}{q}$ astfel încât: $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) +$ $+ c = 0$; deci $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Cum a, b, c sunt impare, din această egalitate rezultă imediat că numerele p şi q trebuie să fie pare amândouă. Dar atunci $x = \frac{p}{q}$ nu ar mai fi ireductibilă. **35**. Din egalitatea $x =$ $= 3n + 1 = 7m - 1$ se obţine că m este de forma $m = 3t + 2$. Deci $x = 21t +$ $+ 13$. **36**. $x^2 - 4x + m^2 = 0$ are determinantul $\triangle_1 = 16 - 4m^2$; $x^2 - mx + 1 =$ $= 0$ are discriminantul $\triangle_2 = m^2 - 4$; $\triangle_1 > 0 \Leftrightarrow \triangle_2 < 0$ şi în acest caz intersecţia este vidă; deci $\triangle_1 = \triangle_2 = 0$, $m = \pm 2$; şi în acest caz intersecţia este vidă. **37**. În primul caz se arată că $A = \{1, a, b\}$. În al doilea caz se arată că prima ecuaţie are o rădăcină dublă şi cea de a doua are două rădăcini reale de forme diferite de rădăcina primei ecuaţii. **38**. Se foloseşte discriminantul celor două ecuaţii. **39**. Pentru $m = 2$, A are un singur element. **40**. Dacă $m \neq 1, 2$, A are 3 elemnte; dacă $m = 1, 2$, A are 2 elemente. **41**. Cele două ecuaţii au discriminantul strict pozitiv şi nu au nici o rădăcină comună. **42**. Dacă -1 este rădăcină, avem $m = -3$; dacă 1 este rădăcină, avem $m = -\frac{1}{3}$. **43**. **44**. **45**. **46**. Se studiază semnul rădăcinilor. **47**. Notăm $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a =$ $= 0\}$. Se studiază cazurile: 1) $A = \varnothing$, adică $a^2 < b$; atunci $A - B = \varnothing$; 2) A are un singur element x_1; atunci este necesar şi suficient ca $x_1 \in B$. Se obţin pentru (a, b) soluţiile $(0, 0)$; $(1, 1)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; 3) A are două elemente, deci B trebuie să aibă aceleaşi elemente. Se obţin condiţiile $b^2 > a$, $a^2 > b$ şi $a = b$. **48**. $X = (A - B) \cup (B - A)$.

Capitolul III
FUNCŢII

1. Sunt 6 funcţi injective. **2**. Sunt 9 funcţii. **3**. Sunt 12 funcţii. **4**. Se

înlocuieşte x cu $1 - x$ şi se obţine un sistem de ecuaţii, care rezolvat dă $f(x) = -4x+\frac{11}{5}$. **5**. Facem $y = x$ şi $f(2x) - f(0) = 4x^2$. Punem $f(0) = a$ şi înlocuim x cu $\frac{x}{2}$. Avem $f(x) = a + x^2$. **6**. Se face $y = 1$; se obţine că f este o funcţie constantă. **7**. Se face $x = 0$ şi $x = n$ şi se obţine o contradicţie. **8**. Nu există. **9**. $m=\frac{5}{12}$, $n=\frac{11}{12}$. **10**. Nu există. **11**. Se înlocuieşte x cu $-x$ şi se obţine $4f(-x) + 3f(x) = c|x|$. Se formează sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}4f(x)+3f(-x)=c|x|\\3f(x)+4f(-x)=c|x|\end{cases}$. Se obţine $f(x)=\frac{c}{7}|x|$. **12**. $f(x) = x$; $f(x) = -x + b$, $b \in \mathbf{R}$. **13**. $f^n(x) = a^n x + (a^{n-1}b + a^{n-2}b + \ldots + ab + b)$. **14**. $f(x)=\begin{cases}2x-1,\ x\geq 2\\x+1,\ x<2\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}3x-1,\ x\geq 2\\x+3,\ x<2\end{cases}$. **15**. $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\geq 1\\-x+3,\ x<1\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}x-1,\ x\geq 2\\-x+3,\ x<2\end{cases}$; $(g\circ f)(x)=\begin{cases}x,\ x\geq 1\\2-x,\ x<1\end{cases}$; $(f\circ g)(x)=\begin{cases}x,\ x\geq 2\\4-x,\ x<2\end{cases}$. **16**. $(f\circ g)(x)=\begin{cases}n,\ n \text{ par}\\0,\ n \text{ impar}\end{cases}$; $(g\circ f)(x)=n$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. **17**. $(f\circ g)(x)=\begin{cases}-8,\ x\leq -2\\3x-2,\ -2<x\leq 0\\-2,\ x>0\end{cases}$, $(g\circ f)(x)=-3$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

18. $(f\circ g)(x)=\begin{cases}2x+5,\ x<-1\\x^2+2x+4,\ x\geq -1\end{cases}$; $(g\circ f)(x)=\begin{cases}2x+4,\ x<0\\x^2+4,\ x\geq 0\end{cases}$.

19. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2},\ x\leq 3\\x-1,\ x>3\end{cases}$. **20**. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x},\ x\geq 4\\\frac{x+2}{3},\ x<4\end{cases}$.

21. $f^{-1}(x)=\begin{cases}x+3,\ x\leq 1\\\frac{x+7}{2},\ x>1\end{cases}$. **22**. a) f nu este injectivă deoarece $f(0) = f(5)$; b) f nu este injectivă deoarece $f(0) = f(7)$; c) $f(x) = x(x^2 - 3x + 2) - 4$ şi se vede că $f(0) = f(1) = f(2)$; $f(x) = x^{1979}(x^2 - 4) + 1 \Rightarrow f(0) = f(2) = f(-2)$.

24. $f(x) = x^3(2x + 3) + 4 \Rightarrow f(0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f$ nu este injectivă; $g(x) = g(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y \Rightarrow g$ injectivă. **25**. a) $m = 2$; b) $f(1) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 2$, f nu este injectivă. **26**. Avem că $f_{m,n}$ este injectivă dacă $m \geq 0$ şi $n > 0$; $f_{m,n}$ este surjectivă dacă $m \leq 0$ şi $n > 0$; $f_{m,n}$ este bijectivă pentru $m = 0$ si $n > 0$. **27**. I) Dacă îl scriem pe a în baza 10 atunci b este ultima cifră; II) dacă $a = 0$ atunci luăm $n_0 = 1$; $a = 1$ luăm $n_0 = 1$; $a = 2$ luăm $n_0 = 4$; $a = 3$, $n_0 = 4$; $a = 4$, $n_0 = 2$; $a = 5$, $n_0 = 1$; $a = 6$, $n_0 = 1$; $a = 7$, $n_0 = 4$; $a = 8$, $n_0 = 4$; $a = 9$, $n_0 = 2$. **28**. Presupunem că $f \neq 1_A \Rightarrow (\exists)\ a \in A, f(a) = b$ cu $a \neq b$. Fie $c \in A$, $c \notin \{a, b\}$. Considerăm funcţia $g : A \to A$, $g(a) = a$, $g(b) = c$, $g(c) = b$ şi $g(x) = x$, $\forall x \notin \{a, b, c\}$; $(g \circ f)(a) = c$ şi $(f \circ g)(a) = b$ rezultă $g \circ f \neq f \circ g$. **29.** a) $f([-1, 1]) = [-1, 3]$, $f([-2, 0]) = [-3, 1]$, $f([-2, 1]) = (-3, 3]$, $f([1, 2]) = (3, 5)$. b) $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 2 \\ x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$; $f([1, 3]) = f([1, 2] \cup [2, 3]) = f([1, 2]) \cup f([2, 3]) = [1, 2]$; $f([-1, 3]) = [1, 4]$; $f([1, +\infty]) = [1, +\infty]$; $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -2, \ f([0, 1]) = \{2\}; \\ 2, & -2 \leq x \leq 1, \ f([-2, 1]) = \{2\}; \\ 2x, & x > 1; \ f([-3, 2]) = [2, 4]. \end{cases}$ **30.** b) Presupunem f injectivă. Fie $b \in f(X) \cap f(Y)$; atunci $b \in f(X)$ şi $b \in f(Y)$. Există $x \in X$ şi $y \in Y$ astfel încât $b = f(x) = f(y)$. Cum f este injectivă, atunci $x = y$ şi deci $x \in X \cap Y$; deci $b \in f(X \cap Y)$. Deci $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Cum $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$, obţinem egalitatea $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$. Reciproc, presupunem $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ oricare ar fi submulţimile X, Y ale lui A. Fie $x, y \in A$ astfel încât $f(x) = f(y)$. Notăm $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$; rezultă $f(X) = \{f(x)\}$ şi $f(Y) = \{f(y)\}$, de unde obţinem $f(X \cap Y) \neq \varnothing$. Deci $X \cap Y \neq \varnothing$ şi deci $x = y$, adică f este injectivă. **31.** a) Presupunem funcţia f injectivă. Fie $b \in f(CA')$. Atunci există $a \in CA'$ astfel încât $b = f(a)$. Deci $a \notin A'$. Dacă $b \in f(A')$ atunci există $a' \in A'$ cu $b = f(a')$. Cum f este injectivă, $a = a'$ şi deci $a \in A'$, contradicţie. Deci $b \notin f(A')$, adică $b \in Cf(A')$. Deci $f(CA') \subset Cf(A')$. Reciproc, fie $x \neq y$. Notăm $A' = \{x\}$. Deci $y \in CA'$ şi deci $f(y) \in f(CA') \subset Cf(A')$ de unde $f(y) \notin f(A')$; cum $f(A') = \{f(x)\}$ obţinem $f(y) \neq f(x)$ şi deci f este injectivă. **32**. a) Presupunem f injectivă.

Fie $f_*(A') = f_*(A'')$ unde $A', A'' \in P(A)$. Avem $f(A') = f(A'')$. Fie $x \in A' \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = f(A') \Rightarrow f(x) = f(A'') \Rightarrow (\exists)\ y \in A''$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x =$ $= y \Rightarrow x \in A' \Rightarrow A' \subset A''$. Analog se arată că $A'' \subset A''$.Deci f_* este injectivă. Fie $f(x) = f(y)$, $x, y \in A$. Dacă $A' = \{x\}$, $A'' = \{y\} \Rightarrow f_*(A') = f_*(A'')$. Deci $A' = A'' \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injectivă. b) şi c) se demonstrează analog.

33. a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 0 \\ -2x+1, & x < 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [0,\ 1] \\ x-1, & x \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty) \end{cases}$.

35. Funcţia $h : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, definită prin: $h(x) = x$ dacă $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$; $h(0) = 0$ dacă $x \in \mathbf{N}$; $h(x) = \frac{x}{2}$ dacă $x \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ şi x par; $h(x) = \frac{x-1}{2}$ dacă $x \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ şi x impar, verifică condiţiile din enunţ. Un exemplu de astfel de funcţie este şi $h : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $h(x) = [x]\{x\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă, iar $\{x\}$ partea fracţionară a lui x. **36.** Presupunem prin absurd că h este bijectivă şi fie p_i, $1 \leq i \leq 5$, numere prime distincte. Există $x_i \in \mathbf{Z}$ astfel încât $h(x_i) = p_i$, $1 \leq i \leq 5$. Deci $f(x_i)g(x_i) = p_i$ şi atunci $\exists x_i, x_j \in \mathbf{Z}$, $x_i \neq x_j$, astfel încât $f(x_i) = f(x_j)$, contradicţie.

Capitolul IV
NUMERE REALE
(Structura algebrică şi de ordine a mulţimii numerelor reale)

8. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere reale $\Rightarrow \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} +$ $+ \frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_n}{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})(a_1+a_2+\ldots+a_n)} =$ $= \frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$. **9.** Se arată că produsul este egal cu $\frac{\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[c-(a+b)\right]+abc}{abc}$. I) Dacă $c = -(a + b)$, numărătorul se reduce la $9\,abc$, şi deci produsul este 9. II) Dacă $c^2 = (a - b)^2$, numărătorul se reduce la abc, deci produsul este 1. **10.** Dacă $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 +$ $+ c^3$ rezultă că $3(a + b)(c + a)(b + c) = 0$. Deci unul din factori este neapărat nul. Dacă $b + c = 0$, atunci $c = -b$, de unde $c^{2n+1} = -b^{2n+1}$. Fiecare membru al egalităţii se reduce la a^{2n+1}. **11.** II) Din $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ re-

zultă $\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]=0$, de unde $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$. **12.** I) Înmulţim membru cu membru inegalităţile: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$; II) Din $a^2 + b^2 \geq 2ab$, rezultă $(a^2 + b^2)c \geq 2abc$. Analog, avem $(b^2 + c^2)a \geq 2abc$, $(c^2 + a^2)b \geq 2abc$. Adunăm, membru cu membru cele trei inegalităţi. III) Din $a^2 - ab + b^2 \geq ab$, multiplicând ambii membri cu $a + b$, rezultă $a^3 + b^3 \geq (a + b)ab$. Analog, avem $b^3 + c^3 \geq (b + c)bc$, $c^3 + a^3 \geq (c + a)ca$. Adunăm membru cu membru cele trei inegalităţi. **13.** Din $a + b + c = 1$ vom deduce că $\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$, $\frac{1}{b}=\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}$ şi $\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$, de unde $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 3+2+2+2=9$. Egalitatea va avea loc pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$. **14.** Se observă că $\frac{ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c}\leq\frac{b+c}{4}$, $\frac{ca}{c+a}\leq\frac{c+a}{4}$ şi însumându-le, membru cu membru, se obţine inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$. **15.** Deoarece $a + b = 2$, rezultă $a - 1 = 1 - b$. Dacă $c = a - 1 = 1 - b$, atunci $a = 1 + c$, $b = 1 - c$. Inegalitatea de demonstrat devine $(1 + c)^4 + (1 - c)^4 \geq 2$. **16.** Din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi $\Leftrightarrow a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$, $c + a - b > 0$. Aşadar trebuie demonstrat că au loc cele trei inegalităţi de mai înainte $\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4) \Leftrightarrow a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 < 0 \Leftrightarrow [a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2] < 0 \Leftrightarrow (a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c) < 0 \Leftrightarrow (a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b) > 0$. **17.** Din condiţia problemei rezultă $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ şi $a + b + c \neq 0$. În continuare, se arată că, din egalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, rezultă $(b + c)(c + a)(a + b) = 0$. **18.** I) $\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\leq\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\Leftrightarrow 2\left(a^{m+n}+b^{m+n}\right)-\left(a^m+b^m\right)\left(a^n+b^n\right)>0\Leftrightarrow\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\geq 0$. Pentru demonstrarea ultimei inegalităţi se consideră separat cazurile: 1) m şi n impare; 2) m şi n pare; II) În particular $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leq$

$\leq \frac{a^4+b^4}{2}$ şi $\frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^4+b^4}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$, de unde prin înmulţire membru cu membru se obţine inegalitatea cerută. **19.** Avem $(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \geq 0$ şi $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$ care ne dau $2abc(a + b + c) \leq a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ şi $0 \leq a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$. Adunând membru cu membru ultimele inegalităţi obţinem inegalitatea din enunţ. **20.** $\sqrt{(a+c)(b+d)} \leq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ad}-\sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$. Avem egalitate dacă $ad = bc$. **21.** Ridicând la pătrat ambii membri şi făcând calcule se obţine inegalitatea echivalentă $\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 1-ab$, care ridicată din nou la pătrat este echivalentă cu: $0 \leq (a - b)^2$. Egalitatea are loc pentru $a = b$. **22.** I) $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$; III) Înmulţind cu 2 şi trecând totul în membrul al doilea obţinem: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_i - a_j\right)^2 \geq 0$. **23.** Fie $m = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i}$ şi $M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i}$. Atunci $m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M$, pentru orice $i(1 \leq i \leq n)$, de unde $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$, oricare ar fi i. Însumăm după i şi găsim imediat inegalităţile cerute. **24.** Rezultă din problema precedentă. **25.** II) Fie s un număr real pozitiv care îl scriem ca sumă $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ (1). De asemenea, $s = \underbrace{\frac{s}{n}+\frac{s}{n}+\ldots+\frac{s}{n}}_{(n \text{ ori})}$ (2). Să arătăm că dacă termenii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu sunt egali între ei, atunci produsul lor este mai mic decât al celor din descompunerea (2). Să presupunem că $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Dacă $a_1 > \frac{s}{n}$, atunci în mod necesar $a_n < \frac{s}{n}$. Fie diferenţele $a_1 - \frac{s}{n}$ şi $\frac{s}{n} - a_n$ şi să presupunem că $t = \frac{s}{n} - a_n < a_1 - \frac{s}{n}$. Înlocuim în (1) pe a_1 cu $a_1 - t$ şi pe a_n cu $a_n + t = \frac{s}{n}$. Suma termenilor este de asemenea egală cu s, adică $s = (a_1 - t) + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{s}{n}$, dar conform (I) produsul termenilor creşte. Astfel am ajuns la un termen (ultimul) egal cu $\frac{s}{n}$. Se continuă procedeul

până ajungem că toţi termenii trebuie să fie egali cu $\frac{s}{n}$ pentru a avea produsul maxim. **26.** II) $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\right.$ $\left.+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\right.$ $\left.+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b^2}-2\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^3}+\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{c^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\cdot$ $\cdot\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)^2+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right)^2\right]\geq 0$. Celelalte inegalităţi rezultă din aceasta. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$; III) Conform exerciţiului precedent avem: $a_1a_2...a_n \leq \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n$, ceea ce este echivalentă cu inegalitatea mediilor. Egalitatea are loc când toate numerele sunt egale între ele. **27.** Este suficient să demonstrăm că $(a + a')(b + b')\cdot$ $\cdot(c + c') \geq \left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{a'b'c'}\right)^3$. Avem $(a + a')(b + b')(c + c') = abc + a'b'c' +$ $+ (abc' + acb' + bca') + (ab'c' + ba'c' + ca'b')$. Pe de altă parte, $\left(\sqrt[3]{abc}+\right.$ $\left.+\sqrt[3]{a'b'c'}\right)=abc+a'b'c'+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2a'b'c'}+\sqrt[3]{abca'^2b'^2c'^2}$. Acum folosim problema 26 pct II). **28.** I), II). Se foloseşte problema 26. **29.** Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $p = a_1a_2 ... a_n$. Din inegalitatea mediilor avem $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{p}$, iar $p=\underbrace{\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{p}...\sqrt[n]{p}}_{(n \text{ ori})}$. **30.** Rezultă din inegalitatea mediilor. **31.** Din inegalitatea mediilor avem $\frac{a_i^2+a_i+1}{3}\geq a_i$, $1 \leq i \leq n$. Înmulţind membru cu membru cele n inegalităţi, rezultă inegalitatea cerută. Din inegalitatea mediilor avem inegalităţile $\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{a_1}{a_2}+1\geq$ $\geq 3\cdot\frac{a_1}{a_2}$, ..., $\frac{a_n^2}{a_1^2}+\frac{a_n}{a_1}+1\geq 3\cdot\frac{a_n}{a_1}$ care înmulţite membru cu membru ne dau inegalitatea cerută. **33.** În inegalitatea $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, înlocuind numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ prin $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ..., $\frac{1}{a_n}$ se obţine inegalitatea

cerută. Egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = ... = a_n$. **34.** Se foloseşte problema 25. **35.** Observăm mai întâi că dacă $a \geq b > t > 0$, atunci $(a + t)^2 + (b - t)^2 > a^2 + b^2$. În particular, rezultă că $a^2 + b^2 > \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$, unde $s = a + b$. Fie acum (1): $a_1 + a_2 + ... + a_n = s$ şi (2): $\underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + ... + \frac{s}{n}}_{(n \text{ ori})} = s$.

Prin raţionament analog celui de la problema 25, ţinând seamă de inegalitatea de înainte, obţinem că suma pătratelor termenilor din (1) este mai mare decât suma pătratelor termenilor din (2). **36.** Se foloseşte problema precedentă. **37.** Trecând totul în membrul drept, inegalitatea devine: $\sum_{i,j}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 \geq 0$. Egalitatea are loc numai când toate parantezele sunt egale cu 0, adică $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$. **38.** Aplicăm inegalitatea Cauchy Buniakovski din problema precedentă, pentru $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, ..., \sqrt{a_n}$ şi $\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{a_n}}$. **39.** Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakovski pentru $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, ..., \sqrt{a_n}$ şi $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ..., \sqrt{b_n}$. **40.** Se ridică la pătrat ambii membri şi se foloseşte inegalitatea Cauchy-Buniakovski. **41.** Se aplică inegalitatea cunoscută $|a + b| \leq |a| + |b|$. **42.** Se ridică la pătrat ambii membri. **43.** Se ridică la pătrat ambii membri şi se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski. **45.** Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ se consideră cazurile $a \geq b$ şi $a < b$. **46.** Se consideră toate situaţiile de inegalitate care pot avea loc între a, b, c. **48.** Discriminantul ecuaţiei este $-(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \leq 0$, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$. **49.** Dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b < \sqrt{a^2 + b^2}$. Dacă $a = b \Rightarrow a = b = \frac{a+b}{2} < \sqrt{a^2 + b^2}$. Dacă $a > b$ atunci $b < \frac{a+b}{2} < a < \sqrt{a^2 + b^2}$. **50.** I) $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = 1$; II) $x_2 = \frac{1}{2}$; III) $x \in [0, 1]$; IV) $x = \pm 12$; V) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$; VI) $x \in \{-2\} \cup [2, +\infty)$. **51.** I) $x \in [1, 3]$; II) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$; III) Avem $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$; IV) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; V) nu are soluţii; VI) $x \in \mathbf{R}$

VII) $x \in [-1, 3]$; VIII) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$; IX) $x \in (-\infty, 0]$; X) $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

52. a) -5,000...; b) 2,8(3); c) -0,750...; d) 0,000...; e) 2,(45); f) -24,(904761); g) -10,(578947368421052631); **53.** a) $\frac{11}{3}$; b) $\frac{1706}{990} = \frac{853}{495}$; c) $-\frac{309}{99}$; d) $\frac{124}{9900} = \frac{31}{2475}$; e) $-\frac{42999}{9990}$; f) $\frac{4}{3000} = \frac{1}{750}$; g) $\frac{101}{9900}$. **54.** a) - c) raţionale; d) - k) iraţionale. Să demonstrăm, de exemplu că $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ este iraţional. Pesupunem prin absurd, că $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \in \mathbf{Q}$, adică $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{m}{n}$, unde m, n sunt naturale ($\in \mathbf{N}$), $m, n > 0$, iar $(m, n) = 1$. Avem $3m^3 = 2n^3$, de unde rezultă că $2 \mid m^3$. Dar atunci $2 \mid m$ şi deci putem scrie $m = 2 \cdot m_1$. Înlocuind pe m în egalitatea $3m^3 = 2n^3$ se obţine $3 \cdot 2^2 \cdot m_1 = n^3$; deci $2 \mid n$. Dar $2 \mid m$ şi $2 \mid n$, contrazice faptul că $(m, n) = 1$. **55.** Să presupunem prin absurd că această fracţie este periodică, şi fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conţină şi cifra a. De aceea între două cifre a consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de p - 1 zerouri, contradicţie. **56.** Deoarece în şirul numerelor naturale sunt numere care au oricâte zerouri consecutive (de exemplu, 10^n pentru orice n), putem face un raţionament analog cu cel de la problema precedentă. **57.** Presupunem prin absurd că în reprezentarea zecimală a unui număr iraţional, fiecare cifră se repetă de un număr finit de ori. Cum sunt doar 10 cifre, înseamnă că numărul are o scriere zecimală cu un număr finit de cifre după virgulă, adică este raţional; contradicţie. **58.** Dacă $1 \le a < b < c \le 9 \Rightarrow$ numerele 0, $ab0ab00ab000ab0000ab$..., 0, $abc0abc00abc$... sunt iraţionale. **59.** a = 1,73205; b = 1,73205010010001... (vezi problema 55). **60.** Să arătăm că între a şi b este un număr raţional. Fie $m = \left[\frac{1}{b-a}+1\right] > \frac{1}{b-a}$; deci $m(b-a) > \frac{1}{b-a}(b-a) = 1 \Rightarrow mb - ma > 1$. Deci $mb > [mb] > ma$. Notăm $k = [mb]$ şi deci $mb > k > ma$. Dacă $k > 0$, atunci $b > \frac{k}{m} > a$. Analog, dacă $k < 0$. Dacă $k = 0, 0 \in (a, b)$. Fie acum, $r \in (a, b) \cap \mathbf{Q}$ şi $s \in (a, r) \cap \mathbf{Q}$, de unde $(r, s) \subset (a, b)$ cu

$r, s \in \mathbf{Q}$. Oricare ar fi $m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, m \neq 0$ avem $\frac{m\sqrt{2}}{n} \notin \mathbf{Q}$. Fie $\frac{p}{q} \in$ $\in (0, s-r)$. Avem $0 < \frac{p\sqrt{2}}{2q} < s-r$ şi $\frac{p\sqrt{2}}{2q} \notin \mathbf{Q}$. Deoarece $r \in \mathrm{Q}, r+$ $+\frac{p\sqrt{2}}{2q} \in (r, s) \setminus \mathrm{Q}$, şi mai mult, $r+\frac{p\sqrt{2}}{2q} \in (a, b) \setminus \mathbf{Q}$. **61.** Conform problemei 62, fie $b \in (a, \sqrt{2})$, respectiv $b \in (\sqrt{2}, a)$, un număr raţional. **62.** Să presupunem prin absurd că $\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbf{Q}$; atunci $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 \in \mathbf{Q}$, de unde rezultă imediat că $\sqrt{15} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **63.** $\sqrt{m}-\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, dacă m şi n sunt pătrate perfecte sau dacă $m = n; \sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, dacă m şi n sunt pătrate perfecte. **64.** Presupunem prin absurd că $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$; atunci $a = (\sqrt{a})^2 \in \mathbf{Q}$; contradicţie. **65.** I) Fie $k = a+b, a \in \mathbf{Q}, b \notin \mathbf{Q}$. Presupunem prin absurd $k \in \mathbf{Q}$. Atunci $b = k-a \in \mathbf{Q}$, contradicţie; II) Fie $p = \frac{1}{\alpha}$. Presupunem prin absurd că $p \in \mathbf{Q}$; atunci $\alpha = \frac{1}{p} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **66.** Observăm că $a-b = (a+b)-2b; \ a+2b = (a+b)+b$. **67.** I) Conform problemei 63, din $\sqrt{b}-\sqrt{b'} = a'-a \in \mathbf{Q}$, rezultă $b = b'$; II) Conform problemei 63, din $\sqrt{b}+\sqrt{b'} = a'+a \in \mathbf{Q}$, rezultă că b şi b' sunt pătrate perfecte; contradicţie. **68.** $n^2+1 = k^2, k \in \mathrm{N} \Rightarrow (n-k)(n+k) = -1$, de unde $n-k = -1$ şi $n+k = 1$, adică $n = 0$. **69.** a) $n = 3$; b) $n = 4$. **70.** a) primul; b) primul; c) al doilea; d) primul; e) sunt egale; f) primul. **71.** a) $2{,}236 \leq \sqrt{5} < 2{,}327$; b) $-2{,}237 \leq -\sqrt{5} < -2{,}236$; c) $0{,}400 \leq \frac{2}{5} < 0{,}401$; d) $-0{,}400 \leq -\frac{2}{5} < -0{,}399$; e) $3{,}316 \leq \sqrt{11} < 3{,}317$; f) $-3{,}317 \leq -\sqrt{11} <$ $< -3{,}316$; g) $0{,}583 \leq \frac{7}{13} < 0{,}539$; h) $-0{,}539 \leq -\frac{7}{13} < -0{,}538$; i) $1{,}181 \leq$

$\leq \frac{13}{11} < 1{,}182$ j) $-1{,}182 \leq -\frac{13}{11} < -1{,}181$. **72.** a) $x+y=5{,}622\ldots$; b) $x+y=-0{,}298\ldots$. **73.** a) $xy=1{,}509\ldots$; b) $xy=6{,}866\ldots$. **74.** a) $4{,}1815\ldots$; b) $4{,}0599\ldots$; c) $2{,}1642\ldots$; d) $2{,}9027\ldots$; e) $0{,}4096\ldots$; f) $0{,}5098\ldots$; g) $5{,}3823\ldots$. **75.** a) $2{,}449\ldots$; b) $-3{,}872\ldots$; c) $1{,}984\ldots$; d) $-1{,}490\ldots$; e) $-5{,}916\ldots$; f) $-2{,}732\ldots$; g) $1{,}740\ldots$. **76.** Mai întâi se aduc numerele la o formă mai simplă. Dacă notăm cu *a*, *b*, *c*, *d*, respectiv, cele patru numere de la a), b), c), d), atunci: a) $-5{,}1082 \leq a < -5{,}1081$; b) $-2{,}0000 \leq b < -1{,}9999$; c) $2{,}7534 \leq c < 2{,}7535$; d) $-0{,}0939 \leq d < -0{,}0938$. **78.** Ecuaţia dată se mai scrie $999(x+y)=272xy$. Se arată că ecuaţia nu are soluţii întregi, dar are o infinitate de soluţii raţionale. **79.** a) Inecuaţia este echivalentă cu $\frac{|a-b|}{|b+n|} < \frac{|a-b|}{b}$. Cum $a \neq b$, inecuaţia este echivalentă cu $b=|b|<|b+n|=b+n$; b) $\left|\frac{a+n_0}{n+n_0}-1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|b+n_0|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\varepsilon} < |b+n_0| \leq |b|+|n_0| \Rightarrow n_0 > \frac{|a-b|}{\varepsilon}-|b|$. Putem lua $n_0=\left[\frac{|a-b|}{\varepsilon}-|b|\right]+1$.
80. $k=l(l+1), l \in \mathbf{N}$. **81.** Fie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=x \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a}+\sqrt{b}= x-\sqrt{c}$; deci $a+b+2\sqrt{ab}=x^2-2x\sqrt{c}+c$, de unde $2\sqrt{ab}=x^2+c-a-b-2x\sqrt{c}$. Printr-o nouă ridicare la pătrat: $4x(x^2+c-a-b)\sqrt{c}=(x^2+c-a-b)^2+4x^2c-4ab$. Dacă $x(x^2+c-a-b)\neq 0 \Rightarrow \sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Dacă $x(x^2+c-a-b)=0$, atunci avem una din situaţiile: I) $x=0$, atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=0$; II) $x \neq 0$, atunci $x^2+c-a-b=0$. În acest caz se obţine $\sqrt{c}=0$; deci $\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Analog, se demonstrează că $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, \sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$ **82.** Fie $p, q \in \mathbf{N}, p \neq q$ şi $x=\sqrt[n]{\frac{p}{\sqrt{2}}}$; $y=\sqrt[n]{\frac{q}{\sqrt{2}}}$. Atunci $x^n\sqrt{2}, y^n\sqrt{2} \in \mathbf{N}$ şi $x \neq y$, iar $f(x)=f(y)=0$. **84.** a) Ecuaţia este

echivalentă cu $\frac{x-2}{3} \le \frac{x+3}{4} < \frac{x-2}{3}+1$ şi $\frac{x-2}{3} \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{11, 14, 17\}$

b) Avem condiţiile $\frac{x-1}{3} \le \frac{x^2-3x+1}{3} < \frac{x-1}{3}+1$ şi $\frac{x-1}{3} \in \mathbf{Z}$. Se obţine $x=4$. **85.** a) Presupunem prin absurd că $\left|a_k - \frac{1}{2}a_n\right| > \frac{1}{2}$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, a_k \in \left(-\infty, \frac{1}{2}a_n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right)$. Din $k=n \Rightarrow$ $a_n > \varepsilon$, deci $a_n \in \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right)$. Din $|a_1| \le \varepsilon \Rightarrow a_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{2}a_n - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Din $|a_{i+1} - a_i| \le \varepsilon$ rezultă că toţi $a_i, 1 \le i \le n$, se găsesc într-unul singur din cele două intervale; contradicţie; b) Fie $s_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $s_1 =$ $= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - a_n, \ldots, s_n = -a_1 - a_2 - \ldots - a_n$. Putem presupune $s_0 > 0$ şi deci $s_n < 0$. Fie k astfel încât $s_k > 0, s_{k+1} < 0$ (dacă una dintre sume este nulă, problema este rezolvată). Dar $|s_k - s_{k+1}| < 2|a_k|$. Din $0 \in (s_k, s_{k+1})$ rezultă că una din cele două sume s_k, s_{k+1} are modulul $\le |a_k| \le \max\limits_{1\le k\le n}|a_k|$.

86. Ridicând la pătrat ambii membrii ai primei egalităţi, obţinem $a+\sqrt{b} = x+y+2\sqrt{xy}, a, b, x, y \in \mathbf{Q}$ De aici rezultă $a = x+y, b = 4xy$, x şi y fiind rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea: $x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$. Pentru ca să existe x şi y raţionale, este necesar şi suficient ca $a^2 - b$ să fie pătratul unui număr raţional. A doua egalitate se tratează la fel. Avem $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Aceasta se numeşte formula radicalilor compuşi. **87.** Putem presupune $a>0$; deci $c<0$. Avem $0 = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{a+b+c}{m+1}$, deci $a+b+c>0$. Dar $a+b+c+$ $+\frac{c}{m} = a+b+\frac{m+1}{m}c = a+b-\frac{m+1}{m+2}a - b = \frac{1}{m+2}a > 0$.

Avem $f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1)=\frac{(a+b+c)\left(am^2+bm^2+bm+cm^2+2m+c\right)}{(m+1)^2}=$

$$=\frac{(a+b+c)(-am-bm-cm-c)}{(m+1)^2}=\frac{-m}{(m+1)^2}(a+b+c)\left(a+b+c+\frac{c}{m}\right)<0$$

88. Dacă $a<b, |x-a|+|x-b|=\begin{cases}a+b-2x, & \text{pentru } x\le a,\\ -a+b, & \text{pentru } a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & \text{pentru } x\ge b.\end{cases}$. Deci funcţia atinge valoarea minimă $-a+b$, în fiecare punct al intervalului $[a,b]$. În general, putem presupune $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Dacă $n=2k$ scriem $f(x)=$ $=\left(|x-a_1|+|x-a_n|\right)+\left(|x-a_2|+|x-a_{n-1}|\right)+\ldots+\left(|x-a_k|+|x-a_{k-1}|\right)$. Pentru cazul $n=2$, se găseşte în final că funcţia îşi atinge valoarea minimă: $-a_1-a_2-\ldots-a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n$ în fiecare punct al intervalului $[a_k,a_{k+1}]$. Pentru $n=2k+1$, scriem $f(x)=\left(|x-a_1|+|x-a_n|\right)+\ldots+\left(|x-a_k|+\right.$ $\left.+|x-a_{k+2}|\right)+|x-a_{k+1}|$. Rezultă că funcţia îşi atinge valoarea minimă: $-a_1-a_2-\ldots-a_k+a_{k+2}+a_{k+3}+\ldots+a_n$ în $x=a_{k+1}$.

89. a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{(n\text{ ori})}=\frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}\right]<\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}\right]=$$

$=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n}$. De aici, rezultă inegalitatea din dreapta relaţiei de la pct. a); b) Avem evident $\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$. Apoi,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{(2n\text{ ori})}=\frac{2n}{n}=2.$$

Pe de altă parte avem: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\right.$

$$+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{3n-1}\right)+\ldots+\left.\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\right]>$$

$$>\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}\right]=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1.$$

90. Dacă $q=0$ sau $\sqrt{r}\in\mathbf{Q}$ este evident. Dacă nu, presupunem prin absurd că $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}\ (q\neq 0,\sqrt{r}\notin\mathbf{Q})$. Atunci $2=p^3+3q^2pr+\sqrt{r}\cdot$ $\cdot(3qp^2+q^3r)\ \Rightarrow\ p^3+3q^2pr=q,\ q(3p^2+q^2r)=0$. Deci $3p^2+q^2r=0$, contradicţie. **91.** Avem de găsit soluţiile $(a,b), a,b\in\mathbf{Q}, b\geq 0$ ale ecuaţiei $5a^2-3a+16=b^2$. O soluţie particulară este $(0,4)$. Fie $a=a_1, b=b_1+4$ şi avem $5a_1^2-b_1^2-3a_1-8b_1=0$. Pentru $(a_1,b_1)\neq(0,0)$ avem $b_1/a_1=$ $=m/n, (m,n)=1$. Înlocuind $b_1=(m/n)a_1\ \Rightarrow\ a_1=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2},\ a_1\neq 0$. Deci mulţimea $\left\{a\ \middle|\ a=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2}, m,n\in\mathbf{Z},(m,n)=1\right\}$. Altă soluţie poate fi dată dacă scriem relaţia $5a^2-3a+16=b^2$ sub forma $\frac{5a-3}{b-4}=$ $=\frac{b+4}{a}=u, u\in\mathrm{Q}$. **92.** Fie $\{x\}=x-[x]$; atunci ecuaţia devine $x^3-a=$ $=3-\{x\}$, de unde $2<x^3-x\leq 3$. Mai mult, se arată că pentru $x\geq 2$, $x^3-x>3$ pentru $x<-1, x^3-x<2$; pentru $x=-1, x^3-x=0<2$; pentru $-1<x\leq 0, x^3-x<1$ şi pentru $0<x\leq 1, x^3-x\leq 1$. Deci trebuie ca $1<x<2$ şi prin urmare $[x]=1$. Ecuaţia iniţială se scrie $x^3-1=3$, deci

$x^3=4$ de unde $x=\sqrt[3]{4}$. **93.** Avem $s=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}>\frac{1}{10\cdot 11}+$ $+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{1000\cdot 1001}>\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)=$ $=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}>0{,}1-0{,}001=0{,}099$. De asemenea, $s<\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\ldots+$ $+\frac{1}{999\cdot 1000}=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}<$ $<0{,}112-0{,}001=0{,}111$. Deci $0{,}099<s<0{,}111$. **94.** Dacă $a<1$, atunci $a<\sqrt{a}<1$. Presupunem prin absurd că în reprezentarea lui $\sqrt{a}$ nu sunt 100 de 9 consecutivi, adică $\sqrt{a}<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$. Ridicând la pătrat obținem $a<1-2\left(\frac{1}{10}\right)^{100}+\left(\frac{1}{10}\right)^{200}$. Dar, $1-2\left(\frac{1}{10}\right)^{100}+\left(\frac{1}{10}\right)^{200}<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ și deci $a<1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$, ceea ce contrazice faptul că în reprezentarea lui a sunt 100 de 9 consecutivi după virgulă. **95.** a) Fie $N_1=\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$ și $N_2=\frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$. Făcând diferența: $N_2-N_1=\frac{\alpha^2(1+\beta)-\beta^2(1+\alpha)}{\left(1+\alpha+\alpha^2\right)\left(1+\beta+\beta^2\right)}=$ $=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\left(1+\alpha+\alpha^2\right)\left(1+\beta+\beta^2\right)}>0 \Rightarrow N_2>N_1$. b) Se demonstrează analog.

96. Este suficient să demonstrăm pentru $a,b,c\in\mathbf{Z}$. Fie $a+b\sqrt[3]{p}+$ $+c\sqrt[3]{p^2}=0$. Separăm a și ridicăm la cub. Se obține că $p\mid a$. Împărțim egalitatea cu $\sqrt[3]{p}$ și analog deducem $p\mid b$. Continuăm în același mod și găsim $p\mid c$ ş.a.m.d. Deducem că oricare ar fi $k\in\mathbf{N}$, $p^k\mid a$, $p^k\mid b$, $p^k\mid c$ și deci în mod necesar $a=b=c=0$. **97.** a) $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$, unde $0\le\{x\},\{y\}<1$, sunt părțile fracționare ale sumelor x, respectiv y.

Atunci $x+y=[x]+[y]+\{x\}+\{y\}$; $\{x\}+\{y\}\geq 0 \Rightarrow [x]+[y]\leq x+y$ şi $[x]+[y]\in\mathbf{Z}$. Deci $[x]+[y]\leq[x+y]$; b) $x=[x]+\{x\}$, unde $0\leq\{x\}<1$. Fie $[x]=qn+r$, unde $0\leq r\leq n-1$. Atunci $\frac{[x]}{n}=q+\frac{r}{n}$, $\left[\frac{[x]}{n}\right]=q$ şi $x=qn+r+\{x\}=qn+r_1$, unde $r_1=r+\{x\}<n$. Deci, $\frac{x}{n}=q+\frac{r_1}{n}$, unde $0\leq\frac{r_1}{n}<1$ şi $\left[\frac{x}{n}\right]=q=\left[\frac{[x]}{n}\right]$; c) Dacă $x-[x]<\frac{1}{2}$, atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$ şi deci $[2x]=2[x]$ şi $[2x]-[x]=2[x]-[x]=[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Dacă $x-$ $-[x]\geq\frac{1}{2}$, atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1, [2x]=2[x]+1$ deci $[2x]-[x]=2[x]+$ $+1-[x]=[x]+1=\left[x+\frac{1}{2}\right]$; d) Fie $m=[x]$ şi presupunem că $m+\frac{l}{n}\leq$ $\leq x<m+\frac{l+1}{n}$, unde $0\leq l\leq n-1$. Deducem deci că $x+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+$ $+\left[x+\frac{n-l-1}{n}\right]+\left[x+\frac{n-l}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=(n-l)m+l(m+1)=nm+$ $+l=n\left(m+\frac{l}{n}\right)=[nx]$; **98.** b) $n=4$; c) 2 cifre nu sunt în perioadă, iar 6 sunt în perioadă. **99.** $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{n^2+4n+2}{n(n+1)(n+2)}$. Se observă că numitorul fracţiei este multiplu de 3, pe când numărătorul nu este multiplu de 3. Numitorul fracţiei, adusă la forma ireductibilă, are factorii 2 şi 3, de unde rezultă că fracţia se reprezintă printr-o fracţie periodică mixtă. **100.** Observăm mai întâi că este suficient să arătăm pentru $m=1$. a) Fie $\frac{1}{n}=0,(a_1a_2\ldots a_p)$, adică $\frac{1}{n}=\frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^p-1}$, deci $10^p-1=n\cdot(a_1a_2\ldots a_p)$ b) Cu o perioadă de o cifră sunt $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ şi $\frac{a}{9}$ unde $(a,9)=1$. Dacă,

acum, perioada este bc, atunci fracţia este $\frac{bc}{99}$. Ea ar putea fi simplificată, eventual, printr-un divizor al lui 99. La numitor rămâne un divizor al lui 99. Deci numitorul poate fi 3, 9, 11, 33, 99. Însă la $\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{9}$ perioada are o cifră. Deci rămân numai fracţiile de numitor 11, 33, 99, care au perioada de două cifre, etc. c) Produsul a două numere cu perioadă simplă este un număr cu perioadă simplă. Conform a), avem $10^k - 1 = Mn$ şi $10^{k'} - 1 = Mn'$ şi cum $(n, n') = 1$, rezultă $10^{(k,k')} - 1 = Mnn'$. Mai mult, (k, k') este cel mai mic număr cu această proprietate. **101.** Conform problemei 99. b), fracţiile cu două cifre la partea periodică sunt cele de la numitor 11, 33, 99. Dacă la o astfel de fracţie înmulţim numitorul cu 2, 5 sau cu 10, obţinem fracţiile cerute în enunţ. **102.** Perioadele lui $\frac{1}{7}$ şi $\frac{1}{13}$ au câte 6 cifre fiecare. Deci $\frac{m}{7} = \frac{p}{999\,999}$ şi $\frac{m}{13} = \frac{p'}{999\,999}$, de unde $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$. **103.** Perioada având $n-1$ cifre, ca resturi parţiale la împărţirea lui m la n, întâlnim toate numerele a, $1 \le a \le n-1$, eventual într-o altă ordine. Când apare ca rest un anume m, de aici încolo resturile parţiale sunt aceleaşi cu acelea obţinute prin împărţirea lui m la n.

Capitolul V
FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA. INECUAŢII SISTEME DE ECUAŢII

1. a) $f(x) = (x-1)^2 + 5$; b) $f(x) = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{57}{4}$; c) $f(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 5$; d) $f(x) = 0,5(x - 0,2)^2 + 0,28$; e) $f(x) = -0,4(x - 1,25)^2 + 0,725$; f) $5\left(x - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{79}{80}$; **2.** a) $x = \frac{1}{4}$, $V\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$; b) $x = -\frac{1}{2}$, $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{43}{4}\right)$; c) $x = \frac{3}{2}$, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{-39}{4}\right)$; d) $x = 1$, $V(1, -2)$; e) $x = 0,1$, $V(0,1;\ 0,395)$; f)

$x = \frac{1}{3}$, $V\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{36}\right)$. **3.** a) $y_{max} = 0$; b) $y_{min} = \frac{1}{2}$; c) $y_{min} = -\frac{1}{4}$; d) $y_{max} = 7$; e) $y_{min} = \frac{14}{5}$; f) $y_{min} = -4$. **4.** a) Pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ funcţia este pozitivă şi pentru $x \in (1, 5)$ funcţia este negativă; b) Pentru $x \in (-3, -2)$ funcţia este pozitivă şi pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ funcţia este negativă; c) Funcţia este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R}$; d) Funcţia este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) Funcţia este pozitivă pentru $x \in (1, 4)$; f) Funcţia este negativă pentru $x \in \left(0, \frac{25}{2}\right)$. **6.** a) $f(x) = |x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$; $x_1 = x_2 = 1$, $V(1, 0)$ (fig. 1);

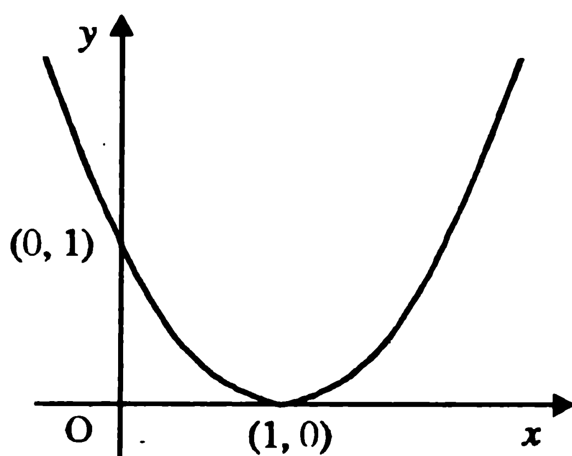


Fig. 1

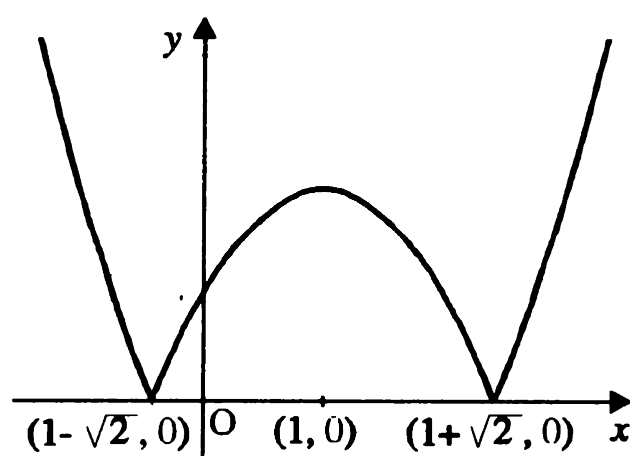


Fig. 2

b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, \text{ dacă } x \in \left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right], \\ x^2 - 2x - 1, \text{ dacă } x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}, +\infty\right); \end{cases}$ (fig. 2)

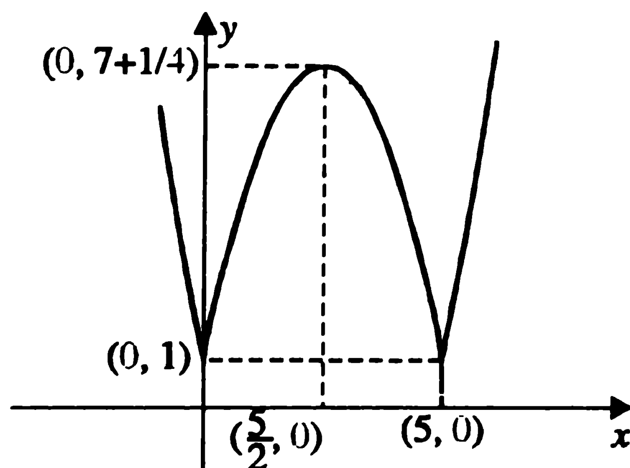


Fig. 3

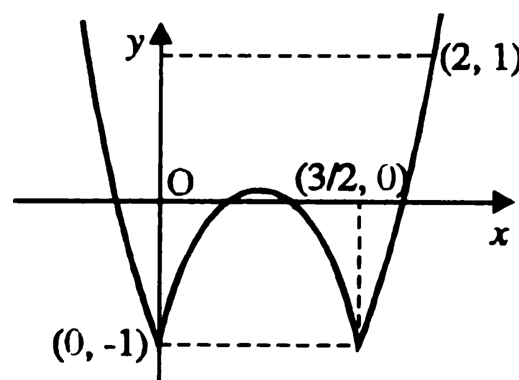


Fig. 4

c) $h(x)=\begin{cases} x^2-5x+1, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ 0]\cup[5,\ +\infty), \\ -x^2+5x+1, \text{ dacă } x\in(0,\ 5); \end{cases}$ (fig. 3)

d) $k(x)=\begin{cases} 2x^2-3x-1, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ 0]\cup\left[\dfrac{3}{2},\ +\infty\right), \\ -2x^2+3x-1, \text{ dacă } x\in\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right); \end{cases}$ (fig. 4)

e) (fig. 5);

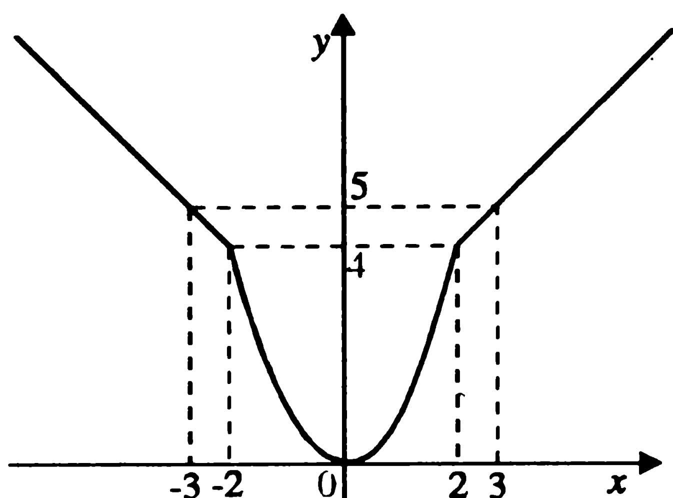


Fig. 5

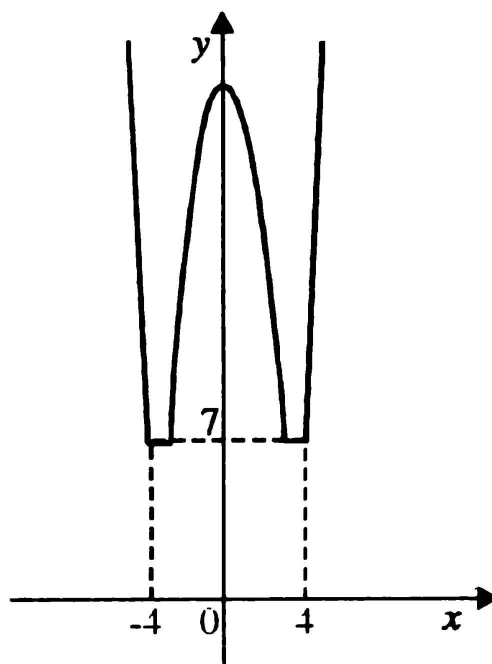


Fig. 6

f) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-25, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ -4]\cup[4,\ +\infty), \\ 7, \text{ dacă } x\in(-4,\ 3]\cup(3,\ 4], \\ -2x^2+25, \text{ dacă } x\in(-3,\ 3); \end{cases}$ (fig. 6)

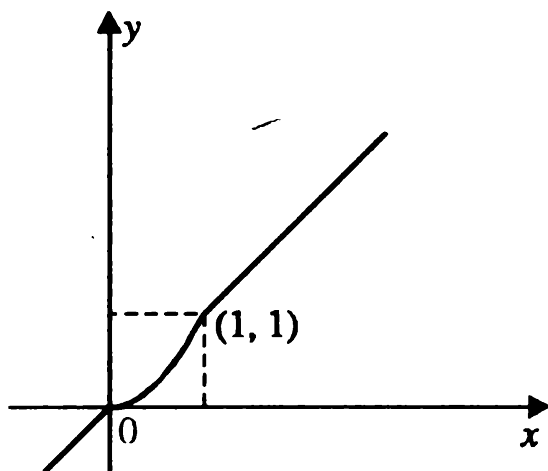


Fig. 7

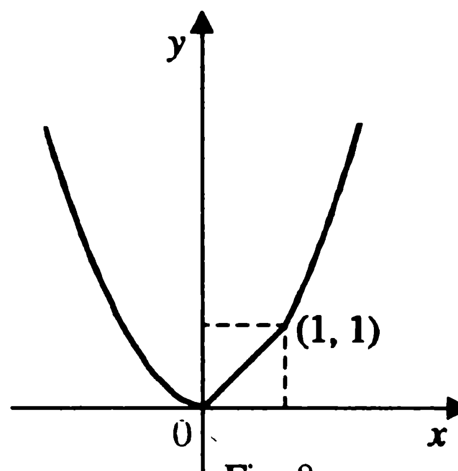


Fig. 8

g) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty), \\ x^2, \text{ dacă } x\in(0,\ 1); \end{cases}$ (fig. 7)

h) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\in(0,\ 1), \\ x^2, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty); \end{cases}$ (fig. 8)

i) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ 0], \\ x^2, \text{ dacă } x\in(0,\ 1), \\ 1, \text{ dacă } x\in(1,\ +\infty); \end{cases}$ (fig. 9)

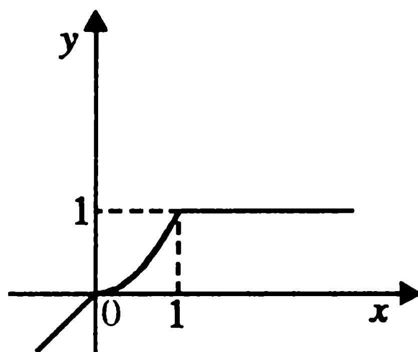


Fig. 9

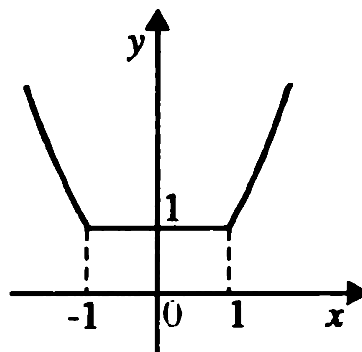


Fig. 10

j) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty), \\ 1, \text{ dacă } x\in(-1,\ 1); \end{cases}$ (fig. 10)

k) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ 0]\cup[2,\ +\infty), \\ 2x, \text{ dacă } x\in(0,\ 2); \end{cases}$ (fig. 11); l) (fig. 12);

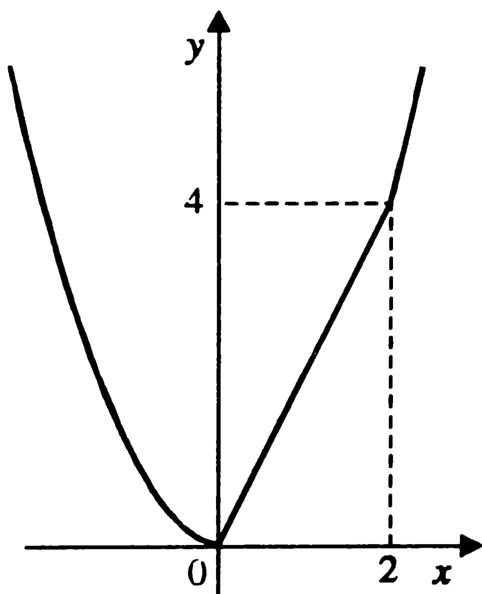


Fig. 11

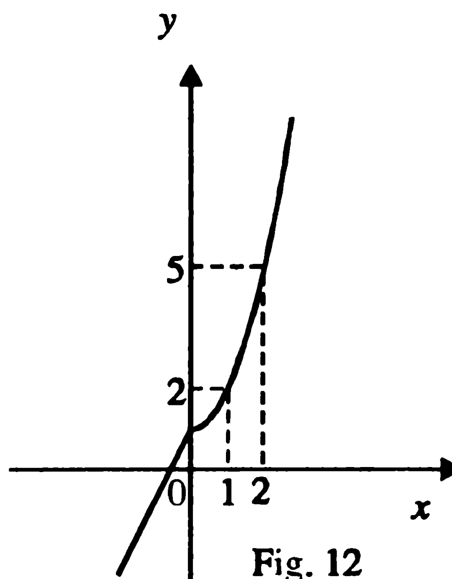


Fig. 12

7. $a = 1$, $c = -4$. **8.** $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. **9.** $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$. **10.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$. **12.** a) Pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $[0, +\infty)$ funcţia este evident strict crescătoare. Fie $x_1 < 0$ şi $x_2 > 0$, atunci $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 1 - x_2^2 - 1 = x_1 - x_2^2 < 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$ şi cum $x_1 < x_2$, atunci funcţia este strict crescătoare pe toată axa reală; b) Se demonstrează ca la punctul a). **13.** Se procedează ca la problema 12. **14.** Pentru injectivitate se ţine cont că funcţiile respective sunt strict crescătoare sau descrescătoare.

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \sqrt{x-1}, \text{ dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1], \\ 1+\sqrt{x-1}, \text{ dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_3^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \dfrac{1-x}{2}, \text{ dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_4^{-1} \begin{cases} 2+\sqrt{2-x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 2), \\ 2-\sqrt{x-2}, \text{ dacă } x \in [2, +\infty); \end{cases}$$

15. $a = -25$, $b = 10$, $c = 8$; $a = -1$, $b = 10$, $c = -16$. **16.** a) $m = -\frac{6}{7}$; b) $m = \frac{7}{3}$; c) -4; $-\frac{12}{13}$; d) 15; -3; e) -2; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $-2 \pm \sqrt{2}$; h) 0; i) 12; -3; j) $\frac{-5}{8}$; -1; k) 0; 2. **17.** Se ţine seama de relaţiile între rădăcini şi coeficienţi la ecuaţia de gradul II şi se obţine: a) m; b) $m + 1$; c) $m^2 - 2m - 2$; d) $\sqrt{m^2-4m-4}$ dacă $x_1 \geq x_2$ şi $-\sqrt{m^2-4m-4}$ dacă $x_1 < x_2$; e) $m(m^2 - 3m - 3)$; f) $m^4 - 4m^3 - 2m^2 + 4m + 2$; g) $m^5 - 5m^4 + 10m^2 + 5m$; h) $\frac{m}{m+1}$; i) $\frac{m^2-2m-2}{(m+1)^2}$; j) $\frac{m^3-3m^2-3m}{(m+1)^3}$. **18.** Se observă că rădăcinile ecuaţiei date sunt pozitive. a) $S = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $S^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = m^2 + 2\sqrt{m^2+1}$, de unde $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2+1}}$; b) $S = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$,

$S^4 = x_1 + x_2 + 4\sqrt[4]{x_1x_2}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) + 6\sqrt{x_1x_2}$, $S^4 = m^2 + 4\sqrt[4]{m^2 +}$ $\overline{+1\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2+1}}} + 6\sqrt{m^2+1}$, $S = \sqrt[4]{m^2 + 4\sqrt[4]{m^2+1}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2+1}} + 6\sqrt{m^2+1}}$.

19. a) $x^2 - 49 = 0$, b) $x^2 + 5x = 0$; c) $15x^2 - 34x + 15 = 0$; d) $14x^2 - 17x + 5 = 0$; e) $9x^2 - 6x - 1 = 0$. **20.** a) $y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{m+1}{5m-2}$, $y_1y_2 = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{2}{5m-2}$. Sau se procedează astfel $x = \frac{1}{y}$ şi se înlocuieşte în ecuaţia dată.

b) $y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-m+1}{2} - \frac{m+1}{5m-2} = \frac{-(m+1)5m}{2(5m-2)}$, $y_1y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = \frac{25m^2}{2(5m-2)}$; c) $y_1 + y_2 = \frac{4m-3}{2}$, $y_1y_2 = \frac{-(m+1)(5m-2)}{4}$; d)

$y_1 + y_2 = \frac{x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = \frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$, $y_1y_2 = \frac{x_1+x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_2} = \frac{S^2}{p} = \frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$; e) $y_1 + y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{m^2 - 18m + 9}{10m-4}$, $y_1y_2 = 1$;

$y_1 + y_2 = \frac{-(m+1)(m^2 - 28m + 13)}{(5m-2)^3}$ $y_1y_2 = \frac{8}{(5m-2)^3}$. **21.** a) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$; b) $x \in \mathbf{R}$; c) $x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, +\infty\right)$; d) $x \in \mathbf{R}$; e) $x \in \left(-\infty, \frac{-3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$; f) $\left(-1, \frac{4}{7}\right)$; g) $x \in \left(2, \frac{7}{2}\right)$; h) $x \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$; i) $x \in (-6, 6)$; j) $\left(1-\sqrt{5}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, 1) \cup \left(1, 1+\sqrt{5}\right)$; k) $x \in \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$; l) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$; m) $x \in \left(-\infty, 5-\sqrt{12}\right) \cup \left(5+\sqrt{12}, +\infty\right)$. **22.** a) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right) \cup (1, +\infty)$; b) $x = \frac{1}{3}$;

c) $x \in \left(\frac{7-\sqrt{13}}{6}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{9-\sqrt{21}}{6}\right]$; d) $x \in (-\infty, -4)$; e) $x \in$ $\in \left(-\infty, -1-\sqrt{23}\right] \cup \left[1-\sqrt{11}, -1+\sqrt{23}\right] \cup \left[1+\sqrt{11}, +\infty\right)$. **23.** $\Delta_x < 0$; $\Delta_x =$ $= -y^2 + 4y - m + 4 < 0$. Se pune $\Delta_y < 0$, unde Δ_y este discriminantul ecuației $-y^2 + 4y - m + 4 = 0$, deci $\Delta_y = -4m + 32 < 0$; $m \in (8, +\infty)$. **24.** Se procedează ca la problema 23. şi se găseşte $m \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$. **25.** Se notează $x^2 - 4x + 5 = t$ şi se obține $t \in [-1, 0) \cup \left[\frac{4}{5}, +\infty\right)$, de unde $-1 \le x^2 - 4x + 5 < 0$ sau $x^2 - 4x + 5 \ge \frac{4}{5}$ şi se obține $x \in \mathbf{R}$. **26.** $f([0, 2]) = f([0, 1) \cup [1, 2]) = [-1, 0]$; b) $f([-2, 4)] = f([-2, 1) \cup [1, 4) = [-1, 8]$; c) $f([1, 6]) =$ $= [-1, 24]$; d) $f([-10, 0]) = [0, 120]$. S-a ținut cont că funcția este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ şi strict crescătoare pe $(1, +\infty)$. **27.** $f([-4, 0]) =$ $= [3, 35]$; b) $f([1, 6]) = f([1, 2) \cup [2, 6]) = [-1, 15]$; c) $f([3, 5]) = [0, 8]$; d) $f([3, +\infty) = [0, +\infty)$; e) $f((-\infty, -1]) = [8, +\infty)$; f) $f((-\infty, 3]) = f((-\infty, 2) \cup [2, 3]) = [-1, +\infty)$. **28.** a) $\Delta = 49$, $y_{min} = -\frac{49}{4}$; $\mathrm{Im}\, f = \left[-\frac{49}{4}, +\infty\right)$; b) $\Delta = -3$, $\mathrm{Im}\, f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$; c) $\mathrm{Im}\, f = [3, +\infty)$; d) Se egalează fracția cu m şi se obține $x^2(1 - m) - x(2 + m) - (3 + m) = 0$. Se pune condiția $\Delta \ge 0$; $m \in$ $\in \left[\frac{2+2\sqrt{13}}{-3}, \frac{-2+2\sqrt{13}}{3}\right]$ deci $\mathrm{Im}\, f = \left[\frac{2+2\sqrt{13}}{-3}, \frac{-2+2\sqrt{13}}{3}\right]$; e) $\mathrm{Im}\, f$ $= \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$; f) $\mathrm{Im}\, f = \left(-\infty, -2-\sqrt{3}\right] \cup \left[-2+\sqrt{3}, +\infty\right)$; g) Presupunem $a < b$ şi obținem $\mathrm{Im}\, f = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$. Dacă $a = b$, $\mathrm{Im}\, f =$ $= \mathbf{R} \setminus \{a\}$. **29.** Se pun condițiile ca discriminantul de la numitor şi de la numărător să fie negativ şi se obține $m \in (1, 2)$. **30.** a) Se arată că discriminantul numitorului este negativ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. b) Discriminantul de la numărător să fie negativ: $m \in \left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right)$. **31.** Se găseşte $\mathrm{Im}\, f$ în funcție de a, $\mathrm{Im}\, f = \left[\frac{-a+2}{3}, \frac{3a+6}{3}\right]$ dacă $a \ge -1$ şi $\mathrm{Im}\, f =$

$=\left[\frac{3a+b}{3}, \frac{-a+2}{3}\right]$, $a < -1$; se pun condiţiile $\frac{-a+2}{3} \geq -3$ şi $\frac{3a+b}{3} \leq 2$ în cazul când $a \geq -1$ şi se obţine $a \in [-1, 0]$. În cazul când $a < -1$ se pun condiţiile $\frac{3a+6}{3} \geq -3$ şi $\frac{-a+2}{3} \leq 2$ şi se obţine $a \in [-4, -1)$. **32.** Fie $y = \frac{3x^2+mx+n}{x^2+1}$; se obţine $(y - 3)x^2 - mx + y - n = 0$ şi se pune condiţia $\Delta_x \geq 0$; $\text{Im} f = \left[\frac{n+3-\sqrt{(n-3)^2+m^2}}{2}, \frac{n+3+\sqrt{(n-3)^2+m^2}}{2}\right]$; se egalează aceste valori cu -3, respectiv 5 şi se obţine $n = -1$ şi $m = \pm 4\sqrt{3}$. **33.** $a \in [1, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **34.** a) $a = 1$ atunci $c = \frac{3}{4}(2m^2+m)$ şi $b = |2m + 1|$; $S = -|2m + 1|$, $P = \frac{3}{4}(2m^2+m) \Rightarrow$ ecuaţia $x^2 + |2m + 1|\, x + \frac{3}{4}(2m^2+2) =$ $=0$; b) Pt. $m > -\frac{1}{2} \Rightarrow m \in \left(-2, -\frac{4}{11}\right)$ şi $\left(-2, -\frac{4}{11}\right) \cap \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \varnothing$

Dacă $m < -\frac{1}{2} \Rightarrow m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3-\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{73}}{2}\right)$ şi deci $m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3-\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. **35.** a) $\Delta = m^2 - 6m + 1$; deci rezultă $m_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. $S = \frac{2(m+1)}{m}$, $P = \frac{8}{m}$.

m	Δ	P	S	Natura şi semnul rădăcinilor
$-\infty$	+	-	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_2 > 0, \lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$
			+	
-1	+	-	0	$m = -1, x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < 0, x_2 > 0, \lvert x_1 \rvert = x_2$
			-	
0	+	-	-	$m \in (-1, 0), x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < 0, x_2 > 0, \lvert x_1 \rvert > x_2$
$3-2\sqrt{2}$	0	+	+	rădăcini egale şi pozitive
	-	+	+	nu are rădăcini reale
$3+2\sqrt{2}$	0	+	+	rădăcini egale şi pozitive
$+\infty$	+	+	+	rădăcini reale distincte şi pozitive

b) $m \in \left(3-2\sqrt{3},\ 0\right)\cup\left(3+2\sqrt{3},\ +\infty\right)$. **36.** $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=m^2 \end{cases}$ şi $\begin{cases} y_1+y_2=m+3 \\ y_1y_2=12m+11 \end{cases}$ şi se obţine $m \in [-1, 5]$. **37.** Se obţine $\dfrac{\alpha^2+\alpha+2}{\alpha-\alpha^2}\le 0$ $\Rightarrow \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ şi $-1 \le \dfrac{2\alpha+2}{\alpha-\alpha^2} \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -1] \cup (0, 1)$; $(-\infty, 0) \cup$ $\cup\ (1, +\infty) \cap (-\infty, -1] \cup (0, 1) = (-\infty, -1]$ deci $\alpha \in (-\infty, -1]$. **38.** $m_1 = 3$, $m_2 = \dfrac{3}{2}$; b) $m \in (0, 2)$.

39. $$(f\circ g)(x)=\begin{cases} (5x-2)^2+6(5x-2), \text{ dacă } x<-\frac{1}{5}, \\ -2(5x-2)-5, \text{ dacă } -\frac{1}{5}\le x\le 1, \\ -2(x^2-3x+4)-5, \text{ dacă } x>1; \end{cases}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} (x^2+6x)^2-2(x^2+6x)+4, & \text{dacă } x\in\left(-\infty,\ -3-\sqrt{10}\right) \\ 5(x^2+6x)-2, & \text{dacă } x\in\left[-3-\sqrt{10},\ -3\right) \\ 5(-2x-5)-2, & \text{dacă } x\in\left[-3,\ +\infty\right) \end{cases}$$

40. $$(f\circ g)(x)=\begin{cases} (4x-2)^2-1, & \text{dacă } x\in\left(-\infty,\ 0\right], \\ (3x^2-2)^2-1, & \text{dacă } x\in\left(0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \\ -5(3x^2-2)-1, & \text{dacă } x\in\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ +\infty\right); \end{cases}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 3(x^2-1)^2-2, & \text{dacă } x\in\left(-\infty,\ -1\right) \\ 4(x^2-1)-2, & \text{dacă } x\in\left[-1,\ 0\right) \\ 4(-5x-1)-2, & \text{dacă } x\in\left(0,\ +\infty\right] \end{cases}$$

41. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right) \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$.

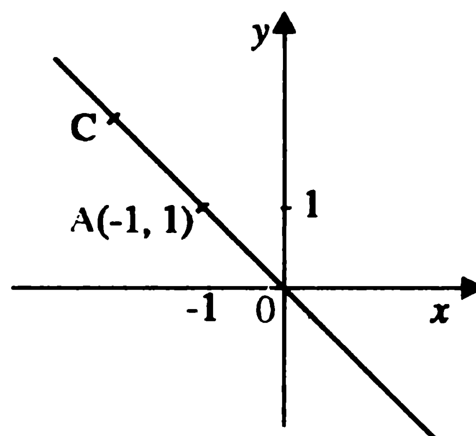


Fig. 13

42. $y = \frac{m-1}{m}$, $m > 0$, $m = \frac{1}{1-y} \Rightarrow y < 1$. Pe semidreapta $|AO$ se găsesc vârfurile parabolelor cu ramurile în sus şi pe semidreapta $|AC$ vârfurile parabolelor cu ramurile în jos. (fig. 13). **43.** Se pune $y_{min} > 0$, $y_{min} = -m^2 + 3m - 2$ deci $m \in (1, 2)$. **44.** a) $x_{min} = m - 2$, $y_{min} = -m^2 + 5m - 6$ deci parabola este $y = -x^2 + x$; b) $y_{min} = -m^2 + 5m - 1 < 0$ deci $m \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. **45.** $\Delta > 0$, $\Delta = 4(m^2 - m + 1) > 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R}$. **46.** a) $x_{min} = m - 1$, $y_{min} = -m^2 + 3m - 1$; parabola este $y = -x^2 + x + 1$; b) Se arată că y_{min} este mai mic decât $\frac{5}{4}$ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. **47.** $x_v = \frac{2m-1}{2m}$; $y_v = \frac{-1}{4m}$; $x_v = y_v$ şi $m = \frac{1}{4}$. **48.** $\Delta > 0$, $\Delta = 24m - 36$; $m \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **49.** $\Delta > 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R}$ şi $\Delta = 36$. **50.** $\Delta = 0$, $\Delta = 4m^2 - 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $x_{1min} = 1$, $x_{2min} = -1$. **51.** $m = -1$. **52.** Se găsesc punctele de intersecţie ale curbelor, $A(1, 2)$ şi $B(3, 14)$. **53.** $x_{min} = 2$, $y_{min} = -1$, $|AB| = 2$, $|DV| = 1$. Aria triunghiului VAB este 1 (fig. 14). Aria dreptunghiului care are lungimea $|AB|$ şi lăţimea $|DV|$ este 2. Deci aria parabolei cuprinsă sub axa Ox care este S va fi cuprinsă între 1 şi 2. **54.** Ecuaţiile să aibă o rădăcină comună: se găseşte $m = -2$. **55.** Se arată că ecuaţia $x^2 - 3x - p = 0$ nu are rădăcini raţionale. **56.** Se duc paralele la axa yy' prin punctele $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ (fig. 15). Aria se aproximează prin ariile a două trapeze dreptunghice şi a două triunghiuri dreptunghice şi aria dreptunghiului care are ca bază segmentul $|AB|$ şi înălţimea $|CD|$.
57. $y_{min} = \frac{m^2 - 10m + 9}{-4}$; $y_{min} > -7$; $m \in \left(5 - 2\sqrt{11}, 5 + 2\sqrt{11}\right)$. **58.** $x_v = \frac{m+7}{m} = 1 + \frac{7}{m}$, $y_v = -14 - \frac{49}{m}$ deci $m = \pm 1$, $m = \pm 7$. **59.** Se pun

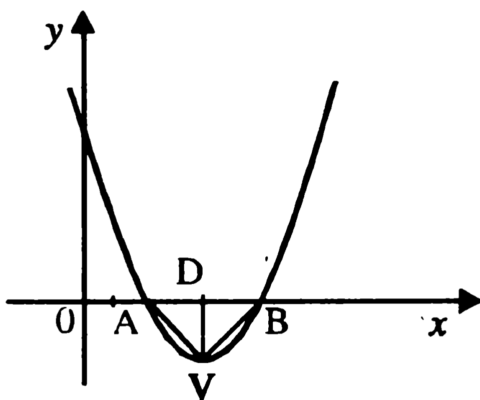


Fig. 14

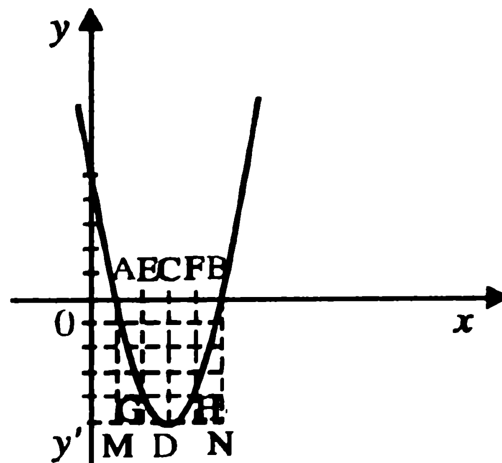


Fig. 15

condiţiile $a < 0$, $y_{min} < 0$; $m - 1 < 0$; $y_{min} = \dfrac{4m+5}{1-m} < 0$, se obţine $m \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{4}\right)$. **60.** I) $y_{min} < 0$, $y_{min} = -(m + 1) < 0$ deci $m \in (-1, +\infty)$; II) $\Delta = 0$, $m = -1$; III) $x_{min} = m - 1$; $y_{min} = -(m + 1)$ şi dreapta este $y = -x - 2$. **61.** I) $\Delta > 0$, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$; $\Delta = 4$; II) Se pun condiţiile $\Delta > 0$, $af(1) > 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 1$ se obţine $m \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$. **62.** Se pun condiţiile $a > 0$ şi $\Delta < 0$; $m \in \left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ $\Rightarrow m \in \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. $m \in (1, +\infty)$. **63.** Condiţiile care se pun sunt $\Delta < 0$ şi $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S < 0$, $P > 0$. Se obţine $m \in (1, +\infty)$. **64.** Se pun condiţiile de la ex. 62; $m \in \left(-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **65.** Se pun condiţiile de mai sus; $m \in (1, +\infty)$. **66.** $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$. **67.** Se pun condiţiile $\Delta < 0$ şi $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S > 0$, $P > 0$. **68.** $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(1, \dfrac{5}{3}\right)$. **69.** Se pun condiţiile $\Delta \le 0$, $a < 0$; $m \in (-\infty, -1]$. **70.** f_m surjectivă pentru orice $m \in \mathbf{R}$; f_m injectivă pentru orice $m \ge 0$. Pentru $m \ge 0$ f_m este inversabilă şi $f_m^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{m-\sqrt{m^2+4(1-x)}}{2}, & \text{dacă } x \le 1 \\ x-1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$. **71.** Cele

două ecuații au aceleași soluții deci $\frac{m}{n-1}=\frac{3m-4}{n-1}=\frac{-6(m-1)}{3(2n-4)}$; se obține $m = 2$, $n=\frac{5}{3}$. **72.** Se procedează ca la exercițiul de mai sus; $m = 2$, $n = 1$. **73.** Pentru a fi îndeplinită condiția, ecuațiile trebuie să aibă o rădăcină comună sau două. Două nu pot să aibă deoarece coeficienții nu sunt proporționali. Pentru prima condiție $m_1 = -19$, $m_2 = 5$. **74.** Ecuațiile au o rădăcină comună; $m_1 = -1$, $m_2 = -2$; se verifică că $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$. **75.** $m \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right) \cup \{2\}$. **76.** $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a > 1$. **77.** Pentru $\Delta \geq 0$, fie $z = x - 1$ și obținem o ecuație în z, cu rădăcinile $z_1 = x_1 - 1$, $z_2 = x_2 - 1$. Avem: a) $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 1$ dacă și numai dacă $z_1 \geq 0$, $z_2 \leq 0$; b) $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$ dacă și numai dacă z_1, $z_2 \geq 0$. Deci problema se reduce la studiul semnelor ecuației în z. Se obține $m \in (-\infty, -2]$. **78.** $m \in \left[-3,\ -2\sqrt{2}\right)$. **79.** $\Delta < 0$, iar pentru $\Delta \geq 0$ vezi indicația de la ex. 77; $m \in (-2, +\infty]$. **80.** $m \in \left(2\sqrt{2},\ 3\right]$. **81.** $m \in (-\infty, 0]$. **82.** $\Delta < 0$; $m \in (0, +\infty]$. **83.** Discriminantul ecuației este pozitiv; suma și produsul rădăcinilor sunt pozitive. **84.** Se arată că $\Delta \geq 0$; $\Delta = [a^2 + (b - c)^2][a^2 + (b + c)^2]$. **85.** $x_1 < 2 < x_2$; $m \in \left(-\infty,\ -\frac{22}{3}\right] \cup (5, +\infty)$. **86.** $m \in [-1, 1]$. **87.** Pentru $\Delta \geq 0$, fie $z=\frac{x-1}{x+1}$ unde -1 și 1 sunt capetele intervalului și obținem o ecuație în z cu rădăcinile $z_1=\frac{x_1-1}{x_1+1}$, $z_2=\frac{x_2-1}{x_2+1}$. Avem: a) $z_1 \in (-1, 1)$ și $z_2 \notin [-1, 1)$ dacă și numai dacă $z_1 < 0$, $z_2 \geq 0$; b) $z_1, z_2 \in (-1, 1)$ dacă și numai dacă $z_1, z_2 < 0$. Deci problema se reduce la studiul semnelor ecuației în z. Se obține $m \in [-1, +\infty)$. **88.** $m \in \left[-\frac{5}{4},\ -1\right]$. **89.** $f(-1)f(1) < 0$; $m \in \left(-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$. **90.** $\Delta < 0$, iar pt. $\Delta \geq 0$ vezi indicația de la ex. 87, $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$. **91.** $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$ atunci $\Delta_3 \geq 0$, $\Delta_1 = b^2 - 4ac$; $\Delta_2 = b'^2 - 4a'c'$, $\Delta_3 = b^2b'^2 - 4aa'cc'$. Se obține $b^2b'^2 - 4b^2a'c' - 4acb'^2 + 16aca'c' \geq 0 \Rightarrow b^2b'^2 - 4aa'cc' \geq 4a'c'b^2 +$

$+ 4acb'^2 - 20aa'cc' \geq$) şi ţinând cont de $b^2 - 4ac \geq 0$ şi $b'^2 - 4a'c' \geq 0$ se obţine $\Delta_3 \geq 0$. **92.** $x_1 < x_2 < 1$; $m \in (-\infty, -1)$. **93.** $0 < x_1 < x_2 < 1$; $m \in \in \left(\frac{5}{4}, 2\right)$. **94.** $\Delta < 0$ sau $x_1 < 0 < 1 < x_2$; $0 < 1 < x_1 < x_2$; $x_1 < x_2 < 0 < 1$; $m \in (-2, 3) \setminus \{-1, 2\}$. **95.** $5 < x_1 < x_2 < 7$; $5 < x_1 < 7 < x_2$; $x_1 < 5 < x_2 < 7$; $m \in [5; 5,4]$. **96.** Valorile lui m obţinute din $\Delta \leq 0$ se reunesc cu cele date de condiţiile: $\Delta > 0$ şi $x_1, x_2 \notin (-1, 1)$. Găsim $m \in \left[-1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right]$.

99. Cum $x^2 - |x| + 1 > 0$ există $x_1 \in A$, x_1 pozitiv. Fie $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Deci x_n este pozitiv şi cum $x_n^2 - x_n + 1 \in A$ rezultă $x_n^2 - x_n + 1 \leq x_n$, de unde $x_n = 1$; aşadar $x_{n-1} < 1$. Dacă $x_n \geq 0$, atunci $x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 \in A$ şi, cum $x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 > x_{n-1}$ avem că $x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 = 1$; deci $x_{n-1} = 0$. Dacă $x_{n-1} < 0 \Rightarrow x_{n-1} = -1$. Se deduce imediat că $A \subseteq \{-1, 0, 1\}$. **100.** Sistemul are soluţie unică: $x = 2$, $y = 1$. **101.** a) $x = 1$, $y = 2$; b) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{9}$; $y_2 = \frac{5}{27}$; c) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = \frac{11}{4}$, $y_2 = \frac{9}{8}$; d) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $y_1 = -\frac{13}{3}$; $x_2 = 1$, $y_2 = -1$. **102.** a) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -2$, $y_2 = -1$; $x_3 = \frac{7}{5\sqrt{7}}$, $y_3 = \frac{19}{5\sqrt{7}}$; $x_4 = -\frac{7}{5\sqrt{7}}$, $y_4 = -\frac{19}{5\sqrt{7}}$; b) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = -2$ etc.; c) $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x = y = z = \frac{-1}{2}$ $x_2 = -3$, $y_2 = -4$; d) $x_1 = 1$, $y_1 = 6$; $x_2 = -1$, $y_2 = -6$; e) $x = \frac{p}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$, $y = \frac{q}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$; f) $x = 1$, $y = 1$; g) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = -2$; h) $x_1 = 16$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 16$; i) $x_1 = 2$, $y_1 = -5$; $z_1 = -4$; $x_2 = -2$, $y_2 = -1$, $z_2 = 0$; j) $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$; k) $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $z_1 = -3$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$, $z_2 = 3$. **104.** $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{b+c}{bc}\right)$; $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{a+c}{ac}\right)$; $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$. **105.** Se substituie x din ecuaţia a doua în prima şi se obţine $2y^2 - 2y(a - z) + z^2 + a^2 - z(1 + 2a) = 0$. Se pune condiţia ca ecuaţia în y să aibă o singură soluţie reală deci $\Delta_y = 0$ şi se obţine $-4(z^2 + a^2) + 8z(1 + a) = 0$. La fel $\Delta_z = 0$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$. **106.** Se substituie z din prima ecuație în ecuația a doua $\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0$, adică $x = 1$, $y = 1$ și $z = -1$. **107.** $a = \frac{5}{2}$; $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$. **108.** Pentru $a = \pm 1$ sistemul are 3 soluții, iar pentru $a = \pm\sqrt{2}$ are 2 soluții. **109.** a) $x = 5$, $y = 7$; b) $x_1 = 2$, $y_1 = -3$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$; c) $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{1}{2}$. d) $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 2$; e) Se descompun primii membri ai ecuației și se formează patru sisteme de ecuații; se obține: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = -1$, $y_3 = -1$; $x_4 = -\sqrt{3}$, $y_4 = \sqrt{3}$; $x_5 = \sqrt{3}$, $y_5 = -\sqrt{3}$; f) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; g) $x = 1$, $y = 1$; h) Se împart cele două ecuații și se ajunge la ecuația $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ și se obțin soluțiile $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; i) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = a$; $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $z_2 = 0$; $x_3 = a$, $y_3 = 0$, $z_3 = 0$. **110.** (1, 1). **111.** (2, -3, 3); (1, 0, 0). **112.** a < -1. **113.** Se împarte prima ecuație la celelalte două și se obțin ecuațiile $y = 2x$, $z = 3x$. Se substituie în prima ecuație și se găsește $x = \frac{1}{\sqrt[10]{648}}$, $y = \frac{2}{\sqrt[10]{648}}$, $z = \frac{3}{\sqrt[10]{648}}$. **114.** Se ridică la puterea p șirul de rapoarte egale, se aplică proprietatea șirului de rapoarte egale și se obține: $\frac{x_k^p}{a_k^p} = \frac{b^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}$

deci $x_k = \frac{a_k b}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}}$. **115.** a) Se rezolvă ecuația a două ținând cont de prima și se obține $x = 1$, $y = 1$ etc.; b) Se ține cont de cazurile $x < 1$, $y < 1$; $1 < x < 2$, $y < 1$; $x > 2$, $y > 1$; $x < 1$, $y > 1$; $1 < x < 2$, $y > 1$; $x > 2$, $y > 1$ și se obține $x_1 = \frac{7-\sqrt{33}}{2}$, $y_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$ etc. **116.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$. **117.** Se înmulțesc ecuațiile între ele și se obține: $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n =$

$= \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}$; se împarte ecuaţia obţinută cu fiecare ecuaţie în parte şi se obţine $x_i = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_i}}$. **118.** Scriem $2\sqrt{x_1 - 1} + 2 \cdot 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2n\sqrt{x_n - n^2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$; $\left(\sqrt{x_1 - 1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x_2 - 2^2} - 2^2\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{x_n - n^2} - n^2\right)^2 = 0$. Se egalează fiecare termen cu zero. **120.** $A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2ax + a^2)$; $y_m = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **121.** Se aplică relaţia lui Stewart în $\Delta\, MBC$, $MD = x$ (fig. 16).

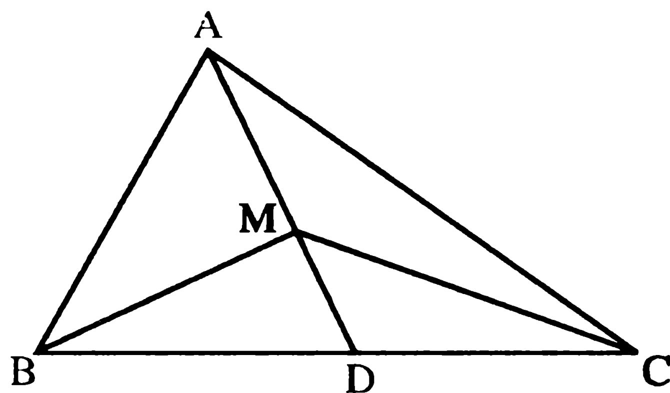


Fig. 16

$MB^2 \cdot CD + MC^2 \cdot BD = MD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$. $AD = m$. $MB^2 + MC^2 = 2MD^2 + 2BD^2$. Adunând MA^2 la ambii membri, se obţine $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA^2 + 2MD^2 + 2BD^2$; $MA^2 + MB^2 + MC^2$ va fi minimă când $MA^2 + 2MD^2 = (m - x)^2 + 2x^2$ este minimă (BD = ct.) $\Rightarrow x = \frac{m}{3} \Rightarrow MD = \frac{AD}{3}$. **122.** Se notează: $d(A, M) = x$, $d(M, B) = 20 - x$ şi se găseşte $x_1 = 200$ m, $x_2 \approx 10{,}5$ ($y_1 = \frac{100\,k}{x^2}$, $y_2 = \frac{81\,k}{(20 - x)^2}$, reprezentând intensitatea luminoasă a sursei A, respectiv B). **123.** O centrul cercului. Se notează OM = x, MB = 10 - x. Se găseşte $A \leq 50\pi$ cm^2 (deci M coincide cu O (centrul cercului)). **124.** $R_1 = \frac{x}{2}$, $R_2 = \frac{20 - x}{2}$, $A = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(20 - x)^2}{4}$; aceasta este minimă ($A \geq 50\pi$) pentru x = 10 (fig 17).

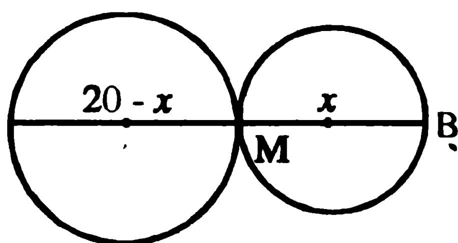


Fig. 17

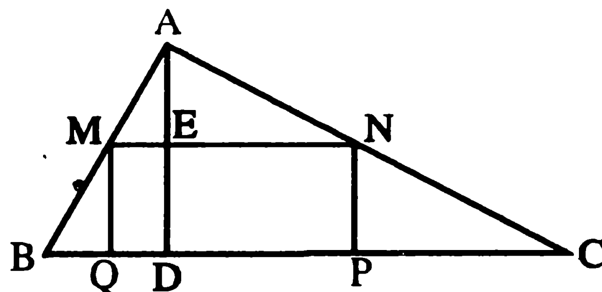


Fig. 18

125. $A = Ll = 60L - L^2$, $L^2 - 60L + A = 0$, $L \in \mathbf{R}$; $A \leq 900$ m^2; pentru $L = 30$, $l = 30$ m. **126.** Se notează $|BC| = a$, $|AD| = h$, $|PQ| = x$, $|MQ| = y$, $|AE| = h - y$ (fig 18). $A_{MNPQ} = xy$ şi se obţine din asemănarea triunghiurilor, $x = \frac{a}{h}(h-y)$. Atunci $ay^2 - ayh + Ah = 0$, se pune condiţia ca $\Delta \geq 0$ şi se obţine $\Delta \geq \frac{ah}{4}$ şi aceasta pentru $y = \frac{h}{2}$ (tăierea se face la jumătatea înălţimii). **127.** $P = 2L + 2l$, $A = Ll$ şi se obţine $2l^2 - Pl + 162 = 0$, $L \in \mathbf{R}$; se pune condiţia ca $\Delta_l \geq 0$ şi se obţine $P \geq 36$, $P = 36$ pentru $l = 9$ şi dreptunghiul devine pătrat în acest caz. **128.** Se notează cu x, y minimum de zile în care se poate transporta marfa prima maşină, respectiv a doua maşină. Se obţine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ şi $2400x + 5400y = k$ (cantitatea de benzină măsurată). Se obţine $2400x^2 + 15000x = k(x - 5)$. Se pune condiţia ca $\Delta \geq 0$ şi se obţine k (minim) = 720 litri pentru $x = 12\frac{1}{2}$ zile şi $y = 8\frac{1}{3}$ zile. **129.** Notăm $AC = x$, atunci $BC = 7 - x$, $AD = y$ şi $BD = 5 - y$ ($D \in |AB|$, (fig 19); se găseşte $l = \frac{\sqrt{-24x^2 + 168x - 144}}{5}$ şi $A = \sqrt{-6x^2 + 12x - 36}$. Aria maximă adică $A = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ dacă $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, şi $l = \sqrt{6}$. **130.** Fie înălţimea AD (fig 20). Notăm: $BD = x$, $BC = m$.

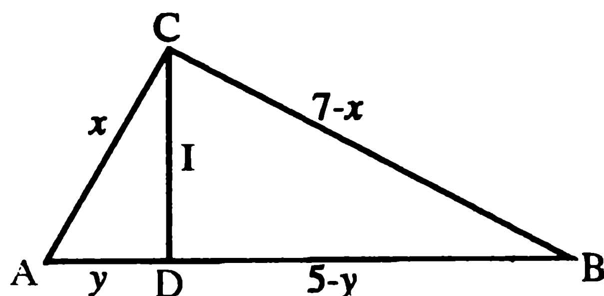


Fig. 19

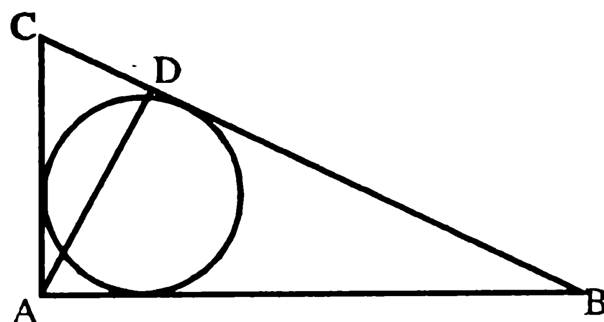


Fig. 20

Perimetru este $2p$. Dacă S este aria atunci $S = rp \Rightarrow r = \frac{S}{p} \cdot r$ va fi maximă când $S = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{x(m-x)m}}{2}$ va fi maxim. $x(m - x)m^2 =$ $= -m^2x^2 + m^3x$ va fi maxim pentru $x = -\frac{m^3}{-2m^2}$, $x = \frac{m}{2}$; $BD = \frac{BC}{2}$.

131. Se arată că $x \geq \sqrt{2} \Rightarrow y \geq \sqrt{2},\ z \geq \sqrt{2}$. Analog se arată că sistemul admite şi soluţia $x = y = z = -\sqrt{2}$. **132.** Se observă mai întâi că x, y, z, au acelaşi semn. Se deduce apoi că $x = y = z$, de unde $x = y = z = \frac{1}{2}$ şi $x = y = z = -\frac{1}{2}$. **133.** a) Se arată că $x \geq 3 \Rightarrow y \geq 3$ şi $z \geq 3$. Prin adunarea ecuaţiilor rezultă că $x = y = z = 3$. b) (-1, -1, -1).

Capitolul VI
PUTERI ŞI RADICALI

1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{144}{121}$; c) $\frac{82}{3}$; d) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $\frac{(3x-2y)(a+b)}{a^2b^2+y}$; b) $\frac{xy(b-a)}{ab}$; c) $\frac{x+y}{x-y}$; d) $\frac{1}{a-1}$; e) $\frac{(b-a)^3+a^3}{(b-a)^4}$. **3.** a) $\frac{9}{24}$; b) $\frac{16}{9}$; **4.** $80\,xyz(x^2 + y^2 + z^2)$. **8.** $16[ab(a^2 + b^2) - cd(c^2 + d^2)]$. **11.** a) primul este mai mare; b) primul este mai mare; c) primul este mai mare; d) sunt egale; e) primul este mai mare. **13.** Dacă n este par funcţia nu este injectivă şi nici surjectivă; dacă n este impar funcţia este injectivă şi surjectivă. **15.** a) $|x +$

$+ 2|$; b) $||x| - 3|$; c) $|-2x^2 + 3x - 1|$; d) $||x^2| - 3x + 2|$. **16.** a) Dacă $x < -2$ suma este $-2x$; dacă $x \in [-2, 2]$ suma este 4; dacă $x > 2$ suma este $2x$; b) dacă $x < -3$ suma este -5; dacă $x \in [-3, 2]$ suma este $2x + 1$; dacă $x > 2$ suma este 5; c) dacă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$ suma este $3x^2 - 2x + 3$; dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ suma este $-x^2 + 4x + 1$. **17.** Vezi exerciţiul 16. **18.** a) $x \in [1, +\infty)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$; c) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$; d) $x \in \mathbf{R}$; e) $x \in \mathbf{R}$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$; h) $x \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right]$; i) $x \in [1, 2] \cup [3, +\infty)$; j) $x \in [5, +\infty)$; k) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$; l) $x \in [-2, +\infty)$; m) $x \in (-\infty, -9] \cup [5, +\infty)$. **19.** a) al doilea; b) al doilea; c) egale; d) primul; e) al doilea; f) al doilea; g) primul. **20.** a) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt[4]{54}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt[12]{75}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{3}$. **21.** minus; plus; minus; minus; dacă $m > n^2$, este pozitiv, iar dacă $m < n^2$, este negativ. **22.** a) primul; b) al doilea. **23.** a) $6\left(7\sqrt{10} - 29\right)$; b) 1. **24.** a) Se ridică ambii membri la pătrat; b) Membrul stâng este egal cu $\frac{1}{\sqrt[8]{\sqrt[5]{5}}}\sqrt[8]{2 - \sqrt[5]{32}}$, iar membrul drept este egal cu $\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}}\left(1 + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3^2}\right)$. **25.** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. **26.** $\sqrt{7} + \sqrt{2}$. **27.** $\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\cdot 1} \le \frac{1}{2}\left[(4a+1)+1\right] = 2a+1$. La fel $\sqrt{4b+1} \le 2b+1$, $\sqrt{4c+1} \le 2c+1$. Adunăm apoi inegalităţile membru cu membru. **28.** a) $\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$; b) $\frac{(x-2)\sqrt{x+4}}{(x+2)\sqrt{x-4}}$; c) $\frac{x+\sqrt{y+2}}{x-1}$. **29.** Numărătorul se mai poate scrie $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + ... + b^{m-1})$. După simplificare se obţine $a^{m-1} + a^{m-2}b + ... + b^{m-1}$ şi ţinând cont de $a > b > 0$ se obţin inegalităţile. Făcând $a = n + 2$, $b = n + 1$ şi $m = n + 1$ obţinem $(n + 1)(n + 2)^n > (n + 2)^{n+1} - (n + 1)^{n+1}$, de unde $(n + 1)^{n+1} > (n + 2)^n$, deci

$\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n+1]{n+2}$. **30.** a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \sqrt[4]{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$; b) $3+2\sqrt{2}$; c) $4-2\sqrt{3}$; d) $\sqrt{5}-2$; e) $\sqrt{3}-1$; f) $5+3\sqrt{2}$. **31.** Se aplică formula radicalilor compuşi şi se arată că numărul este 6.

32. a) $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; b) $\dfrac{5\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{4}+9\right)}{-23}$;

c) $\sqrt[3]{2}-1$; d) $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{3}$; e) $\dfrac{\sqrt{6}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{6}$; f) $\dfrac{3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{6}+12}{23}$.

35. $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 1,6 + 1,2 = 2,8 < 2\sqrt[3]{3}$. **36.** Se aplică formula radicalilor compuşi şi se obţine numărul egal cu $\dfrac{7}{13}$. **37.** Se aplică formula $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. **39.** a) Se notează numărul cu u şi se ridică la puterea a treia de unde $u = 2\sqrt{2}$; b) $u = -2$; c) $u = 2\sqrt{2}$; d) $u = 1$.

40. a) $\dfrac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}$; b) $\left(\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; d) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$;

c) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}-1\right)\sqrt{5}}{10}$; e) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{25}+9\right)}$;

f) $-\dfrac{1}{18}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}+9\right)$; g) $\dfrac{3-\sqrt[4]{27}}{6}$; h) $-\dfrac{1}{252}\left(\sqrt[3]{9}+9\right)$.

41. Punem $\sqrt[3]{a}=u$, $\sqrt[3]{b}=v$, $\sqrt[3]{c}=w$ şi folosim identitatea $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - vw - wu - uv)$. Obţinem $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}$. Mai departe înmulţim numărătorul şi numitorul ultimei fracţii cu $(a + b + c)^2 + 3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. **42.** Se poate proceda ca la exerciţiul precedent. **43.** I) Pentru raţionalizare se aplică formula $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$; se obţine $\dfrac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^n-b}$; II) $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\right)}{a(a-1)}$. **44.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} = \sqrt{x-1}+1$; $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \left|\sqrt{x-1}-1\right|$; expresia este egală cu $\frac{2}{2-x}$. **45.** a) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}}$, dacă $x \in [1, +\infty)$; b) $x = \frac{1}{2}$. **46.** Din condiţiile de existenţă ale rădăcinilor $x + 1 \geq 0$, $1 - x^2 \geq 0$, $\sqrt[3]{x^2+7}-2 \geq 0$ rezultă $x = -1$, care verifică ecuaţia. **47.** a) Ecuaţia nu are soluţii; b) $x = 3$. **48.** a) $x = \frac{-15-\sqrt{5}}{2}$; b) $x = -\frac{5}{8}$; c) $x = -2$; d) $x = 2-\sqrt{2}$; e) $x = 2$; f) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{2}{3}$; g) $x = 3$. **49.** $x_1 = a$, $x_2 = -a$. **50.** Eliminând radicalii se obţine ecuaţia $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$, care se mai scrie $(x^2 - x - a)(x^2 + x - a + 1) = 0$. Pentru $a = 0$, $x = 0$. Pentru $a \geq 1$, $x = -\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}$. **51.** a) $x = \frac{16}{25}$; b) $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$; c) $x_1 = \frac{15+4\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 1$. **52.** $x = \frac{4-a}{2\sqrt{2(2-a)}}$, pentru $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$. **53.** Dacă $2a + 2b - c \neq 0$, atunci $x = \frac{(c-a-b)^2-4ab}{2(2a+2b-c)}$, cu condiţia ca $2x \geq a + b - c$, este o soluţie a ecuaţiei. Dacă $2a + 2b - c = 0$ şi $a \neq b$, ecuaţia nu are soluţii. Dacă $2a + 2b - c = 0$ şi $a = b$, atunci oricare $x > -a$ este o soluţie a ecuaţiei. **54.** a) $x = 3$; b) $x = 0$; c) $x = 5$. **55.** Pentru $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ecuaţia are soluţia $x = \frac{1}{2a-1}$. **56.** Dacă $c > 0$ şi $c^2 \geq | a - b |$ ecuaţia are soluţia $x = \frac{(c^2+b-a)^2-4bc^2}{4c^2}$. Dacă $c = 0$ şi $a \neq b$, ecuaţia nu are soluţie, iar dacă $c = 0$ şi $a = b$, ecuaţia este nedeterminată. **57.** a) $x = 3$; b) $x = 15$.
58. Dacă $(b - c)(a' - a) \neq 0$, ecuaţia are soluţia $x = \frac{c-b'}{a'-a} = \frac{b-c'}{a'-a}$, cu condiţia ca numerele de sub radicali să fie pozitive (adică, $a' - a$, ca' -

- ab' şi ba' - ac' să aibă acelaşi semn). Dacă $b = c$ şi $b' = c'$ ecuaţia este nedeterminată. Dacă $a = a'$ şi $b \neq c$ sau măcar $b' \neq c'$ ecuaţia este imposibilă. **59.** Ecuaţia are ca soluţie $x = 1 + \frac{a^2(2-a)^2}{4(a-1)^2}$, pentru $a \in (1, 2]$.

60. $x = \frac{n}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1}$, dacă a, $b \neq 0$, n impar. Dacă n este par, ecuaţia are aceeaşi soluţie x, când $ab > 0$ şi $a < b$. **61.** Rezultă din identitatea $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = \frac{1}{2}(u + v + w)[(v - w)^2 + (w - u)^2 + (u - v)^2]$, în care se înlocuieşte u, v, w respectiv cu $\sqrt[3]{E(x)}$, $\sqrt[3]{F(x)} - \sqrt[3]{G(x)}$. **62.** Se foloseşte problema 61 şi se găseşte $x^2 = \frac{(a+b)^2(a-b)}{27b}$, pentru $b \neq 0$. Dacă $b = 0$ şi $a \neq 0$ ecuaţia nu are soluţii, iar dacă $a = b = 0$ ecuaţia este nedeterminată. **63.** După problema 59 orice soluţie a ecuaţiei date este soluţie a ecuaţiei $(3x + a + b + c)^3 = 27(x + a)(x + b)(x + c)$ sau $9[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)]x = 27abc - (a + b + c)^3$. **64.** a) Se notează $\sqrt[3]{2-x} = a \sqrt[3]{7+x} = b$ şi se aplică formula $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b}$. Se obţine $x = 1$; b) Se procedează analog ca la exerciţiul precedent. Se obţine $x = 3$; c) Se aplică exerciţiul 61 şi se obţine $x = -1$; d) $x = -\frac{3}{13}$.
65. Demonstraţia este analoagă celei de la exerciţiul 61. **66.** Se aplică exerciţiul 65 şi se obţine $x = -\frac{19}{27}$. **67.** II) Scriem ecuaţia astfel $x - \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} = \sqrt{a-x}\left(\sqrt{b-x} + \sqrt{c-x}\right)$. Pentru ca un număr x diferit de a, b, c să fie soluţie a ecuaţiei date este necesar şi suficient ca el să fie soluţia ecuaţiei obţinută prin ridicarea la pătrat a celor doi membri ai ecuaţiei scrise ca mai înainte, $x - \frac{\alpha}{2a} = \sqrt{b-x}\sqrt{c-x}$ şi să verifice condiţia x > $\sqrt{b-x}\sqrt{c-x}$, sau încă să fie soluţie a ecuaţiei $\left(x - \frac{\alpha}{2a}\right)^2 = (b-x)(c-x)$ şi să verifice condiţiile: $2 < b$, $x < c$, $x > \frac{\alpha}{2a}$.

68. Eliminând radicalul obținem:

$$\left[x^2+(2a-1)x+\frac{1}{16}\right]\left[x^2+(2a+1)x+\left(2a+\frac{17}{16}\right)\right]=0,$$

$x_{1,2}=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}}$. **69.** a) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuației. Se obține $x = 25$; b) $x = 1$; c) $x = 4$; d) $x = 9$. **70.** a) Se notează $\sqrt{2x^2-3x+2}=t$ și se obține ecuația $t^2 - 2t + 1 = 0$. Avem $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x = 1$; c) $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. **71.** Ecuația nu are soluții. **72.** a) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; c) nu are soluții; d) $x_1=-\sqrt{6}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{55}}{3}$. **73.** Ecuația nu are soluții. **74.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\frac{9}{7}$; b) $x = 2$; c) $x = 8$; d) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3=\frac{-2+\sqrt{5}}{3}$, $x_3=\frac{-2-\sqrt{5}}{3}$; e) $x = -1$. **76.** a) Din condițiile de existență ale rădăcinilor rezultă că ecuația nu are soluții; b) Scriem condițiile de existență le radicalilor: rezultă $x = 6$. **77.** a) Se notează $2 - x = u^3$, $x - 1 = v^2$ și se obține sistemul $u + v = 1$, $u^3 + v^2 = 1$, de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 1$; b) Se procedează ca la punctul a) și se obține $x_1 = 3$, $x_2 = 4 - (-1 + \sqrt{3})^3$, $x_3 = 4 + (1 + \sqrt{3})^3$; c) $x = 25$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **78.** $x_1 = 7$; $x_2 = 38$. **79.** a) Se notează $\sqrt[5]{x+\sqrt{x^2-1}}=t$ și se obține ecuația $t^2 + 2t + 1 = 0$. Rezultă $x = 1$; b) Ecuația se poate scrie $\left(\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}-\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2=0$. Dacă notăm $\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+a}}=t$, se obține $t=\pm\frac{1+a}{1-a}$, de unde $x = -a$; c) Se aduce la același numitor și se obține $x=\frac{a\left(\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}\right)^7}{1-\left(\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}\right)^7}$; d) $\frac{2x+1}{ax-1}\geq 0$ și se obține o sumă de trei numere pozitive care nu poate fi egală cu zero. Deci ecuația nu are soluții; c) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuației și

se obţine $x=\pm\sqrt{\dfrac{8a^3+15a^2b+6ab^2-b^3}{2+b}}$; f) $\dfrac{15a^2b-b^3+6ab^2+8a^3}{27b}$.

80. a) Se împarte ecuaţia cu $\sqrt[n]{x^2-1}$. Se obţine $x_1=\dfrac{2^n+1}{2^n-1}$, $x_2=\dfrac{1+2^n}{1-2^n}$; b) Se împarte ecuaţia cu $\sqrt[n]{1+x^3}$ şi se notează $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x+x^2}}=t$. Se obţine ecuaţia $t^2 - t - 1 = 0$, de unde se obţin ecuaţiile $\dfrac{1+x}{1-x+x^2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\dfrac{1+x}{1-x+x^2}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; c) Se împarte ecuaţia cu $\sqrt[m]{a^2-x^2}$ şi se notează $\sqrt[m]{\dfrac{x+a}{a-x}}=t$. Se obţine $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ şi ecuaţiile $\dfrac{x+a}{a-x}=2^m$; $\dfrac{x+a}{a-x}=1$; d) Ecuaţia se scrie $\sqrt[4]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}-2\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt[4]{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}$ şi se împarte cu $\sqrt[4]{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}$. Se notează $\sqrt[4]{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}=t$, se obţine ecuaţia $t^2 - t - 2 = 0$, de unde $\sqrt[4]{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}=2$;

e) Ecuaţia se mai poate scrie: $\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}-2\sqrt[4]{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}=\sqrt[4]{1-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$. Se împarte ecuaţia cu $\sqrt[4]{1-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$ şi se obţine aceeaşi ecuaţie în t ca la punctul d); f) se procedează ca la punctele anterioare. **81.** Dacă $a = 0$, $x \in (-\infty, 0)$; dacă $a > 0$, $x \in [a, +\infty)$; dacă $a < 0$, $x \in (-\infty, a]$. **82.** a) $x \in (-\infty, 5] \cup [50, +\infty) \cap (14, +\infty) \cap (2, +\infty)$, de unde $x \in [50, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [0, +\infty) \cap \left(-\infty, \dfrac{29}{2}\right) \cap \left(-\infty, \dfrac{841}{144}\right)$, de unde $x \in (-\infty, -7)$; c) $x \in (2, +\infty)$; d) $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$. **83.** a) $x \in \left(34+\sqrt{1188}, +\infty\right)$; b) $x \in \left(-2, \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(-1, \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)$; c) $x \in [-6, 0) \cup (3, 4]$; d) $x \in$

$\in \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$. **84.** a) Din condiţiile de existenţă ale rădăcinilor rezultă $x_1 =$ $= 5$; b) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \setminus \left\{7-\sqrt{40}, 7+\sqrt{40}\right\}$; c) $x \in \left[-7, -6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$ d) $x \in \left[-1, \frac{11}{4}\right)$; e) $x \in (10, +\infty]$; f) Din condiţiile de existenţă ale radicalilor rezultă $x \in [3, +\infty]$. Prin ridicare la pătrat se obţine $35x^2 - 37x + 21 > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$; deci $x \in [3, +\infty]$; g) Din condiţiile de existenţă ale radicalilor $\Rightarrow x \in [1, +\infty]$. Inecuaţia: $\frac{1}{\left|\sqrt{x-1}+1\right|}+\frac{1}{\left|\sqrt{x-1}-1\right|} > 2$. Dacă $x \in (1, 2)$ rezultă inecuaţia $2 - x < 1$, deci $x \in (1, 2)$. Dacă $x \in (2, +\infty)$, atunci $x^2 - 5x + 5 < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. Deci $x \in \left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. În concluzie $x \in \left(1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{2\}$. **85.** a) $\sqrt[6]{2^5}$; b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$. **86.** I) 1; II) $-2\left(\frac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}\right)^2$; III) $a^{\frac{2}{3}}$. **87.** I) Dacă a, b, c, d sunt pozitive se obţine $4a^2c\sqrt{3d}$. Dacă a, b, c, oarecare şi $d > 0$ se obţine $\sqrt{3d}\left[a^2c + a|a|\cdot|c| - a^2\frac{c^2}{|c|}\right]$; II) $24a^{\frac{31}{15}}b^{\frac{31}{15}}c^{\frac{1}{15}}d^{\frac{1}{3}}$. **88.** I) Expresia devine $\sqrt{ab}(a+b)-\sqrt{ab}$. Pentru $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ se obţine $\frac{27\sqrt{2}-18}{25}$; II) -1; III) $\frac{\sqrt{a}(1+a)}{a}$; IV) Dacă $a, b > 0$, se obţine $\frac{2b|a-b|}{a+b-|a-b|}$. Dacă $a, b < 0$, $\Rightarrow \frac{2b|a-b|}{-a-b-|a-b|}$. **89.** a) $41 \le \sqrt[3]{72351} < 42$; b) $1{,}5 \le \sqrt{2{,}5} < 1{,}6$; c) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$. **90.** I) Să verificăm de exemplu, inegalitatea din

stânga. $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<$ $<\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Analog, se verifică cealaltă inegalitate. II). Acum, scriem $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}>1+2\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\right.$ $\left.+\left(\sqrt{1000001}-\sqrt{1000000}\right)\right]=1+2\left(\sqrt{1000001}-\sqrt{2}\right)>2\cdot 1001-\sqrt{8}+1>$ $>2000-3+1=1998$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la punctul I). rezultă că numărul este < 2000. Deci partea întreagă a numărului este 1998. **91.** Analog cu problema precedentă (punctul I), rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}>2[(\sqrt{10001}-\sqrt{10000})+$$

$+(\sqrt{10002}-\sqrt{10001})+\ldots+(\sqrt{1000001}-\sqrt{1000000})]=2(\sqrt{1000001}-$ $-\sqrt{10000})>2(1000-100)=1800$. Analog rezultă că $s<1800{,}02$. Deci $1800<s<1800{,}02$. **92.** I) Avem $\left(1+\frac{2}{3n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, de unde rezultă $1+\frac{2}{3n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$. Înmulţind inegalitatea cu $n^{\frac{2}{3}}$, se obţine $n^{\frac{2}{3}}+\frac{2n^{-\frac{1}{3}}}{3}>$ $>(n+1)^{\frac{2}{3}}$, de unde $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]$. Analog, plecând de la inegalitatea $\left(1-\frac{7}{3n}\right)^3>\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$ se obţine $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$; II) Folosim inegalitatea din stânga de la punctul I) şi scriem:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2}\right)+\left(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{5^2}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\sqrt[3]{(1000001)^2}-\sqrt[3]{(1000000)^2}\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1000002000001}-\sqrt[3]{16}\right)>\frac{3}{2}\cdot$$

$\cdot 10000-\sqrt[3]{54}>15000-4=14996$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la punctul I), se obţine că numărul este < 14997. Deci partea

întreagă a numărului este 14996. **93.** (-1, 1). **94.** a) $x=\frac{5}{8}$, $y=\frac{3}{8}$; b) $x = 4, y_1 = 4$ şi $x_2 = 5, y_2 = 4$; c) $x = 1, y = 1$; d) $x_{1,2} = \pm\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $y_{1,2} = \pm\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $x_{3,4} = \pm 5, y_{3,4} = \pm 4$ (semnele corespund) $x_{5,6} = \pm 10\sqrt{3}, y_{5,6} = \mp 8\sqrt{3}$; $x_{7,8} = \pm 15, y_{7,8} = \mp 12$ (semnele alternează); e) $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2, y_2 = 1$; f) $x = 3, y = 1$.

Capitolul VII
NUMERE COMPLEXE

1. a) $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{4}$; b) $x=1$, $y=1$; c) $x=0$, $y=0$; d) $x=-2$, $y=8$; e) $x_1=\sqrt{17}$, $y_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\sqrt{17}$, $y_2=\frac{1}{2}$; $x_3=\sqrt{7}$, $y_3=3$; $x_4=-\sqrt{7}$, $y_4 = 3$; f) $x_1=a$, $y_1=b$; $x_2=\frac{3a-4b+2}{5}$, $y_2=\frac{-4a-3b+14}{5}$. **2.** a) 3 - 4i; 3 + 4i; 2 - 11i; 2 + 11i; b) 18 - 6i, 14 - 3i, 33 - 11$\sqrt{2}$i; c) $-\frac{7}{29}+\frac{32}{29}$i; $\frac{6}{5}-\frac{8}{5}$i; $\frac{52}{145}+\frac{44}{145}$i; $\frac{61}{13}+\frac{4}{13}$i; d) -1 + 3i; 1. **5.** a) $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Dacă $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\varepsilon_1^n=\varepsilon_2^n=1$ dacă $n=3k$; $\varepsilon_1^n=\varepsilon_1, \varepsilon_2^n=\varepsilon_2$ dacă $n=3k+1$; $\varepsilon_1^n=\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^n=\varepsilon_1$ dacă $n=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$); b) Pentru $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, se obţine $-\frac{1}{6}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}$, respectiv $\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru $\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $-\frac{1}{6}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectiv $\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$i; c) a^3+b^3, respectiv a^2-ab+b^2; d) $a^3+b^3+c^3-3abc$. **7.** $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$i; $z_1z_2=\frac{5}{18}+\frac{\sqrt{2}}{18}$i; $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{6}{5}+\frac{6\sqrt{2}}{5}$i; $z_1^2+z_2^2=-\frac{29}{36}+\frac{7\sqrt{2}}{18}$i;

$z_1^3+z_2^3=-\frac{7}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\text{i}$; $z_1^4+z_2^4=\frac{1}{36^2}\left(265-892\sqrt{2}\text{i}\right)$; $z_2^5z_1^{-3}=-\frac{5^3}{12\cdot6^3}\cdot$ $\cdot\left(1+\sqrt{2}\text{i}\right)$. **8.** $\{z\in\mathbb{C}|z=a+b\text{i}, a+b=1\}$. **9.** a) -i; b) $\frac{8ab\left(a^2-b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}\text{i}$;

c) $\frac{3a^2-1}{4a^2+1}(2a-\text{i})$. **10.** a) 2^{100}; b) 2, pentru $n=4k$; 0, pentru $n=4k+1$; -2, pentru $n=4k+2$; 0, pentru $n=4k+3$ ($k\in\mathbf{N}$); c) $(1-\text{i})^n+(1+\text{i})^n$; d) $(2+\text{i})^n+(2-\text{i})^n$. **11.** a) 2; b) -1; c) -1; d) 2. **12.** a) 2, pentru $n=3k$; -1, pentru $n=3k+1$; -1, pentru $n=3k+2$ ($k\in\mathbf{N}$); b) -3, pentru $n=3k$; 0, pentru $n=3k+1$; 0, pentru $n=3k+2$ ($k\in\mathbf{N}$); c) -3, pentru $n=3k$; 0, pentru $n=3k+1$; 0, pentru $n=3k+2$ ($k\in\mathbf{N}$). **13.** Observăm că $i^{4l+1}+i^{4l+2}+i^{4l+3}+i^{4l+4}=0$ şi $(-1)^{4l+1}i^{4l+1}+(-1)^{4l+2}i^{4l+2}+(-1)^{4l+3}i^{4l+3}+$ $+(-1)^{4l+4}i^{4l+4}=0$, unde $l\in\mathrm{N}$. Obţinem $s_1=0$, pentru $n=4k$; $s_1=\text{i}$, pentru $n=4k+1$; $s_1=-1$, pentru $n=4k+2$; $s_1=-\text{i}$, pentru $n=4k+3$. De asemenea, $s_2=0$, pentru $n=4k$; $s_2=-1$, pentru $n=4k+1$; $s_2=-\text{i}-1$, pentru $n=4k+2$; $s_2=-1$, pentru $n=4k+3$. **14.** Dacă $z=(1+\text{i})^n+(1-\text{i})^n$, atunci $\bar{z}=z$, adică $z\in\mathbf{R}$. **15.** $|z|=16$. **16.** a) $z_1=6+17\text{i}$, $z_2=6+8\text{i}$; b) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$; c) $z_1=\frac{-3+\sqrt{7}}{4}+\frac{-1+\sqrt{7}}{4}\text{i}$, $x_2=$ $=\frac{-3-\sqrt{7}}{4}-\frac{1+\sqrt{7}}{4}\text{i}$. **19.** $z_1=21-\text{i}$; $z_2=\frac{9}{10}-\frac{7}{10}\text{i}$. **20.** a) $\{z \mid z=x+\text{i}y, x^2+(y+1)^2-4\le0\}$; b) $\{z \mid z=x+\text{i}y, x^2+(y-2)^2-9>0\}$; c) $\{z \mid z=x+\text{i}y, x^2+y^2-4\le0\}$; d) $\{z \mid z=x+\text{i}y, \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{1}{4}>0$ şi $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{9}{4}<0\}$; e) $\{z \mid z=x+\text{i}y, x^2+(y-1)^2-16>0\}$; f) $\{z \mid z=x+\text{i}y, \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-1<0\}$; g) $\{z \mid z=x+\text{i}y, x<0\}$.

21. a) $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$, $x_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$; b) $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}\text{i}$;

$x_3 = 1 - \sqrt{3}i$; c) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$, $x_3 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$; d) $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$, $x_3 = -\frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i$; e) $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, f) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3i$, $x_4 = -3i$; g) $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_5 = x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **22.** Interpretarea geometrică. Într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu de două ori suma pătratelor laturilor. **23.** Fie $z = a + bi$, $z' = c + di$. Avem $|z + z'| \le |z| + |z'| \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \ge 0$. Mai mult, $|z + z'| \le |z| + |z'| \Leftrightarrow (ad - bc)^2 = 0 \Leftrightarrow$ există λ, astfel încât $c = \lambda a$ şi $d = \lambda b$. **24.** Se folosesc proprietăţile modulului. **25.** a) Avem $|z| = 4m^2 + 1 \in \mathbf{Q}$; b) $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, unde $m, n \in \mathbf{Z}$. **26.** $z = (a - b)^k \in \mathbf{R}$. **27.** $A = \{(x, y) \in P \mid x^2 + (y - 2)^2 - 36 = 0\}$. **28.** $B = \{(x, y) \in P \mid (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 8 = 0\}$. **29.** $C = \{(x, 0); \left(-\frac{1}{2}, y\right) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. **30.** $D = \{(x, y) \in P \mid \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0\}$. **31.** $E = \{(x, y) \in P \mid -2x + 4\}$. **32.** Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale şi distincte dacă $\Delta_1 = b^2 - 4ac > 0$. Pentru $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ avem $\Delta_2 = -4a^2\Delta_1 < 0$. **33.** $a \in \left(\frac{3-\sqrt{33}}{6}, \frac{3+\sqrt{33}}{6}\right)$.

34. $X^4 + X = X(X + 1)\left(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot \left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $X^4 + 16 = \left(X - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) \cdot \left(X - \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$. **35.** a) $z_1 = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} + 2i$ $z_2 = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3} + 2i$; b) $z = -\frac{7}{6} + 4i$. **36.** $\left(1 + ui^{4l+1}\right)\left(1 + ui^{4l+2}\right)\left(1 + ui^{4l+3}\right) \cdot \left(1 + ui^{4l+4}\right) = \left(1 + u^2\right)\left(1 - u^2\right)$, $l \in \mathbf{N}$. Dacă $n = 4k + 1$ sau $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$), produsul este imaginar; dacă $n = 4k + 3$, sau $n = 4k + 4$ ($k \in \mathbf{N}$),

produsul este real. **37.** $\alpha = (u+iv)^n + i^n(u-iv)^n$. Dacă $n = 4k$ ($k \in \mathbf{N}$), α este real; dacă $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$), α este imaginar. **38.** a) $3x^2 = y^4$; b) $x^2 = 3y^4$. **39.** a) Condiţia devine $y^3 - 3x^2y = 0$, $x^3 - 3xy^2 > 64$; b) Condiţia devine $x^3 - 3xy^2 = 0$, $|y^3 - 3x^2y| > 64$. **41.** Pentru $z = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$, se obţine cea mai mare valoare a lui $|z|$, $|z| = \frac{2+\sqrt{a^2+4}}{2}$. Pentru $z = -\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}i$, se obţine cea mai mică valoare a lui $|z|$, $|z| = \frac{\sqrt{a^2+4}-2}{2}$. **42.** $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2}$, $z_4 = -\frac{1}{2}$. **43.** Se foloseşte teorema lui Pitagora. **44.** $A = \{x - (x+1)i \mid x \in \mathbf{R}\}$. **45.** $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\}$. **46.** a) $A = \{(x, y) \in P \mid y = 0\}$; b) $B = \{(x, y) \in P \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$. **47.** a) $z = -\frac{2}{37} - \frac{12}{37}i$; b) $z = -\frac{5}{33} - \frac{29}{33}i$; c) $z = \frac{74\sqrt{3}}{337} + \frac{146}{337}i$; d) $z = -\frac{23}{34} - \frac{7}{34}i$. **48.** $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i$. **50.** a) $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}i$; b) $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+2i$; c) $z_1 = 2+i$, $z_2 = -4-i$; d) $z_{1,2} = \pm\sqrt{2} + i\sqrt{3}$; e) $z_1 = 3+3i$, $z_2 = 2-i$. **51.** a) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = i$; b) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$; c) $z_1 = \frac{8+19i}{7}$, $z_2 \frac{-18+i}{7}$; d) $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + 2i$. **52.** a) $z_{1,2} = 1 + \alpha \pm \alpha(\alpha+1)i$; b) $z_{1,2} = 1 \pm \alpha i$. **53.** Rădăcinile sunt: 0, $\pm i$, ± 1. **55.** a) $\frac{1}{X^2+\sqrt{2X}+1}$; b) $\frac{X+1}{X-1+i}$; c) $\frac{X^2-2X+5}{X^2-4X+5}$; d) $\frac{X-a+bi}{X+bi}$.

56. a) $x_1 = \sqrt{5}$, $y_1 = 3$; $x_2 = -\sqrt{5}$, $y_2 = 3$; $x_3 = \sqrt{3}i$, $y_3 = -5$; $x_4 = -\sqrt{3}i$, $y_4 = -5$; b) $x_1 = \sqrt{2}i$, $y_1 = \sqrt{2}i$; $x_2 = \sqrt{2}i$, $y_2 = -\sqrt{2}i$; $x_3 = -\sqrt{2}i$, $y_3 = \sqrt{2}i$; $x_4 = -\sqrt{2}i$, $y_4 = -\sqrt{2}i$; c) $x_1 = 2$; $y_1 = \sqrt{3}i$; $x_2 = 2$, $y_2 = -\sqrt{3}i$; $x_3 = = -2$, $y_3 = \sqrt{3}i$; $x_4 = -2$, $y_4 = -\sqrt{3}i$. **57.** a) $x = 1 + i$, $y = i$; b) $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$, $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$; c) $x = -\frac{11}{2} + \frac{7}{2}i$, $y = \frac{51}{6} + \frac{1}{3}i$.

Capitolul VIII
FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. a) Se arată, mai întâi, că $1+\sqrt{6}>\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Dacă $a>1$, atunci $\Rightarrow$ $\Rightarrow a^{1+\sqrt{6}}>a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $0<a<1$, atunci $a^{1+\sqrt{6}}<a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $a=1$, cele două numere sunt egale; b) se arată, mai întâi că $\sqrt{2}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2$. Dacă $a>1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}<a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $0<a<1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}>a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $a=1$, cele două numere sunt egale. **2.** a) $x\in(-\infty,-2]$; b) $x\in[-2,+\infty)$; c) $x\in\mathbf{R}$; d) Dacă $a>1$, atunci $x\in[0,+\infty)$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in$ $\in(-\infty,0]$; dacă $a=1$, atunci $x\in\mathbf{R}$. **3.** a) $\text{Im}f_1=[1,3]$; b) $\text{Im}f_2=(0;1]$; c) $\text{Im}f_3=[0,+\infty)$; d) $\text{Im}f_4=(0,1]$; e) Notăm $2^x=t$ și se utilizează variația funcției de gradul al doilea $f(t)=t^2-8t+18$. Obținem $\text{Im}f_5=[1,+\infty)$; **4.** a) Se consideră separat cazurile: $x-3\geq 0$ și $x-3<0$. Obținem $x\in$ $\in(1,5)$; b) Se consideră separat cazurile: $x-4\geq 0$ și $x-4<0$. Se obține $x\in\mathbf{R}$; c) $x\in\left(1,\dfrac{5}{3}\right)\cup(2,+\infty)$; d) Se consideră separat cazurile: $|x|<1$ și $|x|>1$. Se obține $x\in(1,2)$. **6.** a) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$; b) $x\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$; c) $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$; d) $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$; e) Dacă $a>$ >1, atunci $x\in(1,+\infty)$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in(0,1)$; f) Dacă $b>1$, atunci $x\in(1,+\infty)$; dacă $0<b<1$, atunci $x\in(0,1)$. **7.** Dacă $0<a<b<$ <1 sau $1<b<a$, $\Rightarrow \log_a b<\log_b a$; dacă $1<a<b$ sau $0<a<b<1$, atunci $\log_a b>\log_b a$; dacă $a=b$, atunci cele două numere sunt egale. **8.** a) Dacă $a>1$, atunci $x\in[1,+\infty)$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in(0,1]$; b) Dacă $a>1$, atunci $x\in(0,\sqrt[3]{a}\,]$; dacă $0<a<1$, atunci $x\in[\sqrt[3]{a},+\infty)$.

10. a) $x=\sqrt[3]{\dfrac{m^2(m+n)\sqrt{m+n}}{(m-n)^4 n\sqrt{n}}}$; b) $x=\sqrt[4]{\dfrac{v\sqrt[3]{(u+v)^2}}{u^2\sqrt{u-v}}}$. **12.** $\log_6 16=$ $=\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. **13.** $\log_{30}16=4(1-a-b)$. **14.** Se poate folosi inegalitatea mediilor: $\dfrac{2ab}{1+b}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$. **17.** $\dfrac{x}{y}\in\{1,4\}$. **18.** $\log_3 4+\log_{12}2=$ $=\dfrac{(1-m-n)(2+m-2n)}{2m(1-n)}$. **19.** Să demonstrăm, de exemplu, că $\log_2 3\notin$

$\notin \mathbf{Q}$. Presupunem, prin absurd, că $\log_2 3 = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, de unde $2^m = 3^n$. Cum $\log_2 3 > 0$, putem presupune $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Dar egalitatea $2^m = 3^n$, $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ este imposibilă, deoarece membrul stâng este un număr par, iar membrul drept este un număr impar. Prin raţionamente analoage se demonstrează că numerele $\log_5 10$ şi $\log_{\frac{1}{2}} 5 = -\log_2 5$ sunt iraţionale.

20. $b = a^q$, unde $q \in \mathbf{Q}$. **22.** Notăm $\log_2 x = t$ şi obţinem $f(t) = (t^2 - 6t)^2$. Valoarea maximă a lui f se obţine pentru $t = 3$, deci pentru $\log_2 x = 3$, adică pentru $x = 8$. **23.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică (a se vedea exerciţiul 26, capitolul IV). **24.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică (a se vedea exerciţiul 26, capitolul IV). **25.** Avem că $\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow 3 > 2^{\sqrt{2}}$. Dar inegalitatea $3 > 2^{\sqrt{2}}$ este adevărată, deoarece $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} < 3$. Deci $\log_2 3 > \log_3 4$. **26.** Avem $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$, $c = (ab)^z$, $\Rightarrow a^{x+1} = (abc)^x$, $b^{y+1} = (abc)^y$, $c^{z+1} = (abc)^z$. **27.** Avem inegalităţile: $\log_{xy}(yz) + \log_{yz}(xy) \geq 2$, $\log_{yx}(zx) + \log_{zx}(yx) \geq 2$, $\log_{zy}(zx) + \log_{zx}(zy) \geq 2$, care se adună membru cu membru. **28.** Aplicând inegalitatea mediilor, avem: $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 \geq 4\sqrt[4]{\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6} = 4\sqrt[4]{\log_2 6} = 4\sqrt[4]{1 + \log_2 3} > 4\sqrt[4]{1 + \frac{3}{2}} > 5$. **29.** a) $x = 1$; b) Dacă $a \neq 1$, atunci $x \in \{-2, 1, 3\}$; dacă $a = 1$, atunci $x \in \mathbf{R}$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$; d) $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{93}{11}$; e) $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$; f) $x = 2$; g) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; h) nu are soluţii. **30.** a) $x = 3$; b) nu are soluţii; c) $x = 3$; d) $x = 1$. **31.** a) $x = 2$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = 2$; d) $x = 6$; e) $x = 5$; f) $x = 1$. **32.** a) $x = 0$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = \lg\frac{217}{285} \cdot 2\log\frac{7}{5}$. **33.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; b) $x = 4$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x_1 = 3$, $x_1 = \frac{\lg 8}{\lg 6}$; e) $x = 1$. **34.** a) $x = 0$; b) $x = 7$; c) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **35.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{5}{2}$ d) $x_{1,2} = \frac{2\lg\left(5 \pm \sqrt{24}\right)}{\lg 3}$. **36.** a) Se observă

că $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)=1$. Notăm $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=y$ şi se obţine ecuaţia: $y+\frac{1}{y}=62$. Se obţine $y_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15}$, de unde rezultă $x_1 = 2$ şi $x_2 = -2$; b) Se procedează ca la punctul a) şi se obţine $x_1 = -2$ şi $x_2 = 2$; c) Se procedează ca la punctele a) şi b). Se obţine $x = 3$. **37.** a) Împărţind ambii membrii ai ecuaţiei cu 6^x, se obţine: $\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{13}{6}+\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$. Notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, de unde rezultă ecuaţia în y, $6y^2 - 13y + 6 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; c) $x = 0$; d) $x = 1$; e) Ecuaţia dată devine $3\cdot 3^{2x^2+6x-10}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=15\cdot 5^{2x^2+6x-10}$, care este evident de tipul celor de la punctele precedente. Se obţine $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. **38.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă că $x \in \{3\} \cup [5, +\infty)$. Se observă că $x = 3$ verifică ecuaţia, iar pentru $x \geq 5$, avem $5^{\sqrt{x-3}}+7^{\sqrt{x^2-8x+15}}>2$. Deci singura soluţie a ecuaţiei este $x = 3$. **39.** Dacă $a < 0$, ecuaţia nu are soluţii; dacă $a > 0$ ecuaţia are soluţia $x=\log_{\frac{2}{3}}(3a)$. Ecuaţia are soluţie întreagă $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a=\frac{2^n}{3^{n+1}}$. **40.** a) Ecuaţia se scrie $\left(x^x-x\right)\left(x^x-x^2\right)=0$ care are soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$; b) $x = -1$, $x \in [0, 1]$. **41.** a) Se observă că $x = 2$ este o soluţie a ecuaţiei. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei cu 5^x, se obţine ecuaţia echivalentă $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$. Pentru $x < 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, iar pentru $x > 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$. Deci $x = 2$ este unica soluţie a ecuaţiei; b) Din condiţiile de existenţă a radicalilor, avem $x \geq 3$. Se observă că $x = 3$ este o soluţie a ecuaţiei. Mai mult, din monotonia funcţiilor $f_1, f_2 : [3, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $f_2(x)=2^{\sqrt{x-3}}$, rezultă că aceasta este unica soluţie a ecuaţiei; d) Din condiţiile de existenţă a radicalilor, rezultă $x \geq 4$. Cum $1 \leq 2 + a \leq 3$ şi $1 \leq 2 - a \leq 3$, rezultă că: $1 \leq (2+a)^{\sqrt{x-4}}$ şi $1 \leq (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} \Rightarrow 2 \leq (2+a)^{\sqrt{x-4}} + (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}$,

de unde în mod necesar $(2+a)^{\sqrt{x-4}} = (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 1$, de unde rezultă $x = 4$. **42.** a) Se consideră separat cazurile: $|x| \leq 1$ şi $|x| > 1$. Rezultă $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; b) $x \in (-\infty, 1]$. **44.** a) $x = 2$; b) $x = \sqrt{2}$; c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; d) nu are soluţii; e) $x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$; f) $x \in (0, 2] \setminus \{1\}$, $x = \frac{5}{2}$. **45.** a) $x = a^a$; b) $x = a^{3a^2}$; c) $x = c^b$; d) $x_1 = 6$; $x_2 = 14$; e) $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$; f) $x = c$. **46.** a) nu are soluţii; b) nu are soluţii; c) $x = 6^{\frac{3}{4}}$; d) Ecuaţia are soluţii pentru $a > 0$, $x = a\sqrt[3]{4a}$; e) $x = 0{,}99$; f) $x = 1$. **47.** a) $x = 5$; b) $-\frac{\lg 5}{\lg 2}$; c) $x = 5$; d) $x_1 = \lg 2$, $x_2 = 0$; e) $x = 2$; f) $x = 2$; g) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **48.** a) $x_1 = 10$, $x_2 = 10^3$; b) $x \in \{10^{-2\sqrt{2}}, 10^{-2}, 10^2, 10^{2\sqrt{2}}\}$; c) $x \in \{10^{-2}, 10^{-1}, 10, 10^2\}$; d) $x_1 = -\frac{9}{10}$, $x_2 = 9$; e) $x_1 = 2^{-8}$, $x_2 = 2^{27}$; f) $x_1 = 2^{-\frac{4}{27}}$, $x_2 = 2^{\frac{1}{3}}$. **49.** $x_1 = 1$, $x_2 = a^{(m \cdot n)\frac{1}{m-n}}$. **50.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = 3^{-5}$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$; d) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; e) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 5^3$; f) $x \in \{2^{-\sqrt{2}}, 2^{-1}, 2, 2^{\sqrt{2}}\}$; g) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$; h) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. **51.** a) Utilizând formula de schimbare a bazei, ecuaţia devine $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$, de unde se obţine $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$; b) $x = 10^{\lg 3 \lg 5}$; c) $x = a^{\frac{2}{5}}$; d) $x_1 = 4$; $x_2 = 2 + 2^{-\frac{5}{4}}$; e) $x = \frac{1}{32}$; f) $x = 2$. **52.** $x_1 = 1$, $x_2 = ac$. **53.** a) Se observă că $x = 2$ este o soluţie a ecuaţiei. Mai mult, din monotonia funcţiilor $f_1, f_2 : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x + 2^x + \log_2 x$, $f_2(x) = 7$, rezultă că aceasta este unica soluţie a ecuaţiei; b) Se observă că $x = 2$ este o soluţie a ecuaţiei şi că aceasta este unică. **54.** a) $x_1 = a^{a^{-2}}$, $x_2 = a^{a^2}$; b) $x = \frac{1}{a^2}$; c) $x_1 = a$, $x_2 = a^{\frac{9}{16}}$. **55.** $x = 3$, $y = 2$; b) $x = 4$, $y = 0$; c) $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ şi $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; d) $x = 1$, $y = 3$; e) $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 2$ şi

$x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y_2 = -3$. f) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuaţii a sistemului; g) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$. Dacă $a < 1$, $b > 1$, sau $a > 1$, $b < 1$, ecuaţia a doua a sistemului nu poate fi satisfăcută pentru nici o valoare pozitivă a lui x şi y, deci în acest caz sistemul nu are soluţii. Să presupunem că $a > 1$, $b > 1$ (sau $a < 1$, $b < 1$). Logaritmăm ambii termeni ai fiecărei ecuaţii a sistemului şi obţinem că, pentru $a \neq b$,

$x = \left(\frac{\lg a}{\lg b}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}}$ şi $y = \left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b - \lg a}}$, iar pentru $a = b$, sistemul are o infinitate de soluţii $y = x = \alpha$, cu α real pozitiv. h) Dacă $b = 0$ sau măcar $c < 0$, sistemul nu are soluţii. Fie $b > 0$, $c > 0$ şi notăm $a^x = u$, $a^y = v$. Obţinem sistemul $u^2 + v^2 = b$, $uv = c$, unde $u > 0$, $v > 0$. Deci u şi v sunt soluţiile ecuaţiei de gradul al doilea $z^2 - \sqrt{b+2c}z + c = 0$. În final, se obţine că dacă $b - 2c < 0$, sistemul nu are soluţii, iar dacă $b - 2c \geq 0$, atunci $x_1 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} + \sqrt{b-2c}}{2}$, $y_1 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} - \sqrt{b-2c}}{2}$, $x_2 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} - \sqrt{b-2c}}{2}$, $y_2 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} + \sqrt{b-2c}}{2}$; i)$x_1 = 2$, $y_1 = 3$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 3$; j))$x_1 = 8$, $y_1 = 18$ şi $x_1 = 8\log_3^3 2$, $y_1 = 16\log_2^4 3 + 2$; k) $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ şi $x_2 = 4$, $y_2 = 7$; l) Trebuie ca x > 0, y > 0. Avem $x_1 = y_1 = 1$ şi $x_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}$, $y_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}$; m) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$. **56.** $x = 1$, $y = -1$

57. a) $\log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{y} \Rightarrow$ sistemul devine: $x = 8\sqrt{y}$, $x^2 + 16y^2 = 17$. Se obţine $x = 4$, $y = \frac{1}{4}$; b) $x = 10\sqrt[5]{\frac{7^2}{10^4}}$, $y = \sqrt[5]{\frac{7}{10^2}}$; c) $x = y = 3$; d) nu are soluţii; e) $x_1 = y_1 = 2$ şi $x_2 = 8$, $y_2 = \frac{1}{8}$; f) $x = 2$, $y = 6$; g) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Logaritmăm în baza c prima ecuaţie, iar a doua o scriem sub forma

$\log_c \frac{x}{y} = \frac{\log_c x}{\log_c y}$. Dacă $a \neq b$ ($a, b > 0$), atunci $x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$, $y = c^{\frac{b}{b-a}}$. Dacă $a = b$, sistemul nu are soluţii; h) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuaţii; i) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{5}$; j) Ecuaţia a doua devine $x^x = y^{x+2y}$. Se deduce $x = 4$, $y = 2$; k) Trebuie ca $m, n > 0$, $m, n \neq 1$. Dacă $m \neq n$, atunci rezultă $\log_m x = \frac{a - b\log_n m}{1-(\log_n m)^2}$, $\log_m y = \frac{b - a\log_n m}{1-(\log_n m)^2}$. Dacă $m = n$ şi $a \neq b$, ecuaţia nu are soluţie. Dacă $m = n$, $a = b$, sistemul se reduce la ecuaţia $\log_m(xy) = a$; l) Notăm $\log_x y = u$, $\log_x 3 = v$ şi se obţine ecuaţia în u: $7u^3 - 67u^2 + 118u - 24 = 0$ care are o rădăcină $u = 2$; m) Prima ecuaţie a sistemului este $\log_a\left(x^{\log_a x} y^{\log_a y}\right) = 2m$, adică $x^{\log_a x} y^{\log_a y} = a^{2m}$. Se notează $u = x^{\log_a x}$, $v = y^{\log_a y}$ şi sistemul devine $uv = a^{2m}$, $u + v = 2\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}a^m$; n) Adunăm ecuaţiile şi obţinem $(xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} + (yz)^{\lg x} = \frac{a+b+c}{2}$. Scădem din aceasta fiecare din ecuaţiile sistemului dat şi obţinem sistemul $(yz)^{\lg x} = \frac{-a+b+c}{2}$, $(xz)^{\lg y} = \frac{a-b+c}{2}$, $(zy)^{\lg x} = \frac{a+b-c}{2}$. Logaritmăm fiecare ecuaţie a sistemului şi notând $u = \lg x$, $v = \lg y$, $w = \lg z$, obţinem un sistem în u, v, w care se rezolvă uşor. **59.** a) $x \in \left(-1-\sqrt{2}, -2\right) \cup \left(0, -1+\sqrt{2}\right)$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup (0, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; c) $x \in (0, 1)$; d) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x > 3$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left(\frac{5+\sqrt{61}}{6}, 3\right)$; e) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (\log_2 3, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in (-\infty, \log_2 3)$; f) $x \in \left(-\infty, \frac{\log_3 4}{2}\right)$; g) $x \in \left[\sqrt{6}-1, 5\right] \setminus \{2\}$; h) $x \in \left(\frac{31}{100}, 5+2\sqrt{6}\right)$;

i) $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \cup \{2\}$; j) $x \in (1, \log_3 82 - 3) \cup (1, + \log_3 4, +\infty)$;

k) $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; l) $x \in (3, 5) \cup (5, +\infty)$;

m) $x \in \left(0, \sqrt{2}-1\right) \cup (1, +\infty)$; n) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup$

$\cup (3, +\infty)$. **60.** a) $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (1, +\infty)$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in$

$\in (0, 1] \cup \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}\right]$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left[\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}\right) \cup [1, +\infty)$. **61.**

Se consideră separat cazurile: $\frac{a-1}{a+1} > 1$ şi $0 < \frac{a-1}{a+1} < 1$. În primul caz inegalitatea devine $x^2 \geq \frac{-2(a+2)}{a+1}$ şi pentru ca să fie satisfăcută pentru orice x real, trebuie ca $\frac{-2(a+2)}{a+1} \leq 0$; se obţine $a \in (-\infty, -2]$. În al doilea caz inegalitatea devine $x^2 + 3 \leq \frac{a-1}{a+1}$ şi nu există nici o valoare a lui a pentru ca ea să fie satisfăcută pentru orice x real. Deci $a \in (-\infty, -2]$. **62.** $a \in$ $\in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. **63.** $a = 2$. **64.** Punem $z = 2^x > 0$ şi problema revine la a determina toate valorile lui m, astfel încât $mz^2 + 4(m - 1)z + m - 1 > 0$, oricare ar fi $z > 0$. Se găseşte $m \in [1, +\infty)$. **65.** $m \in [0, +\infty)$. **66.** S este nevidă pentru $m \in [2, +\infty)$, iar S este finită pentru $m = 2$. **67.** Dacă notăm $e^a = u$, $e^b = v$, $e^c = w$ avem că u, v, w sunt distincte. Din condiţiile problemei, dând lui x valorile: 0, 1, 2, rezultă: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0$. Rezolvând sistemul de ecuaţii în α, β, γ, găsim $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Capitolul IX
INDUCŢIA MATEMATICĂ

1. Se demonstrează uşor prin inducţie matematică. Este util de încercat să se determine formulele care dau sumele din membrul stâng. **2.**

a) Observăm că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$ $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Se demonstrează, apoi, prin inducţie matematică că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $(\forall)n \geq 1$; b) Observăm $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) =$ $= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{2} k^2 + 2\sum_{k=k}^{n} k$. Dacă se foloseşte problema 1, se va găsi că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Se demonstrează apoi prin inducţie matematică că formula găsită este adevărată pentru orice $n \geq 1$. **3.** Se demonstrează prin inducţie matematică. **4.** a) Folosind formula $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$ rezultă $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} =$ $= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$; b) Din formula: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$, se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$. **5.** a) Folosind formula $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} =$ $= \frac{n}{2n+1}$; b) Din formula $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right]$ rezultă $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; c) Din formula $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} =$ $= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$ se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3n+1}$; d) Se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4n+1}$; e) Se obţine $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i+n-1)(i+n)} =$

$= \frac{n}{k(n+k)}$. **7.** a) Avem $\sum_{k=1}^{n} k!k = \sum_{k=1}^{n} k!(k+1-1) = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]$. Se obține $\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1$; b) $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)!(k+1)-k!k] =$ $=(n+1)!(n+1)-1$; c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)!}$;

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = 1-\frac{1}{(n+2)!}$;

e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right) = \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$;

f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$. **11.** Condiția de existență a logaritmului ne dă $x > -4$. Inegalitatea este echivalentă cu $2^{3x+1} < (x+4)^2$, care este evident satisfăcută pentru x egal cu: -3, -2, -1, 0, 1. Se demonstrează prin inducție matematică că pentru oricare $x \geq 2$, întreg, avem $2^{3x+1} > (x+4)^2$. Deci $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x+1 < 2\log_2(x+4)\} =$ $= \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. **12.** Pentru orice $n = 0, 1$, inegalitatea nu este îndeplinită. Pentru $n = 5, 6$ inegalitatea este îndeplinită. Se demonstrează prin inducție matematică că inegalitatea este îndeplinită pentru orice $n \geq 5$. Deci $\{n \in \mathbf{N} \mid 2^n > n^2\} = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}$. **16.** Pentru $n = 1$, avem $a + b \geq a + b$, adevărată. Să presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k$ și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Într-adevăr, $2^{k-1}(a^k+b^k) \geq (a+b)^k$ ne dă $2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) \geq (a+b)^{k+1}$. Dar $2^k(a^{k+1}+b^{k+1}) \geq 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) \Leftrightarrow a^{k+1}+b^{k+1} \geq a^k b + ab^k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a^k-b^k)(a-b) \geq 0$. Ultima inegalitate fiind evident adevărată, rezultă $2^k(a^{k+1}+b^{k+1}) \geq 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$, deci $2^k(a^{k+1}+b^{k+1}) \geq (a+b)^{k+1}$. Demonstrația este terminată pe baza inducției matematice. **17.** a) Demonstrația se face prin inducție matematică după k; b) Dacă $k \leq n$, atunci: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{k+1}{n}+$

$+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3}<1+\frac{k+1}{n}+$

$+\frac{(k+1)^2}{n^2}$, deoarece $n(k+1)>k^2$ pentru $n \geq k$. Punem mai înainte $k = n$ şi obţinem $2=1+\frac{n}{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2}=3$. **18.** Pentru $n = 6$ se verifică că inegalităţile sunt îndeplinite. Să considerăm: $\left(\frac{k}{2}\right)^k>k!>\left(\frac{k}{3}\right)^k$ şi să demonstrăm că $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}>(k+1)!>\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$. Pentru a demonstra ultimele inegalităţi este suficient să verificăm că: $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}:\left(\frac{k}{2}\right)^k\geq$ $\geq k+1\geq\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}:\left(\frac{k}{3}\right)^k$, care se reduce la $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\geq1\geq\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, care rezultă din problema precedentă. **19.** Pentru $n = 2$, se va obţine $\sqrt{a_1a_2}\leq\frac{a_1+a_2}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq0$. Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k$. Se demonstrează mai întâi că inegalitatea este adevărată pentru $n = 2k$. Din cele de mai sus rezultă că inegalitatea este adevărată pentru un număr natural $n=2^s$, $s \in \mathbf{N}$. Se arată, apoi, că dacă inegalitatea este adevărată pentru $n = k$, atunci este adevărată pentru $n = k - 1$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ numere pozitive şi λ un număr pozitiv, deocamdată nedefinit. Atunci $\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_{k-1}\lambda}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}$. Alegem λ încât $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$, deci $\lambda=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$.

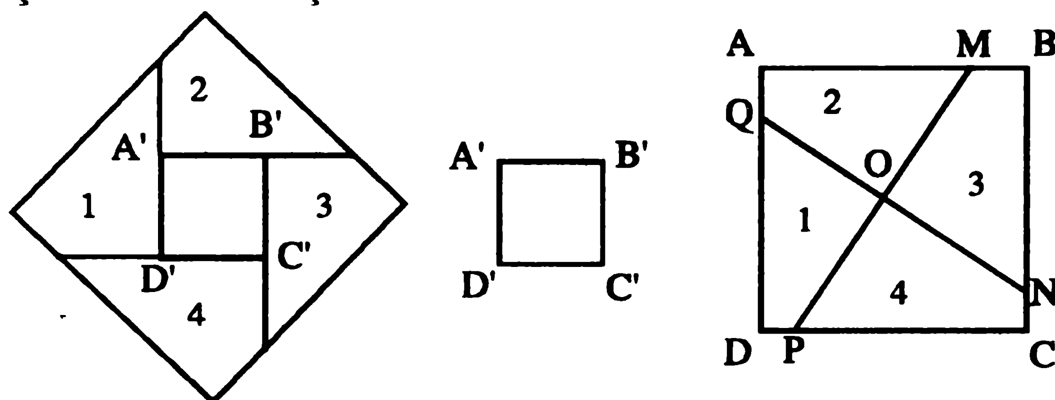
Avem inegalitatea $\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}{k-1}}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$, sau $\sqrt[k-1]{a_1a_2\ldots a_{k-1}}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Fie acum un număr oarecare m, natural. Dacă $m=2^s$, $s \in \mathbf{N}$, rezultă de mai înainte că inegalitatea este ade-

vărată pentru m. Dacă $m \neq 2^t$, oricare ar fi $t \in \mathbf{N}$, atunci fie s, astfel încât $m < 2^s$. Pe baza celor de mai înainte, inegalitatea este adevărată pentru $n = m$. **21.** Demonstraţia rezultă uşor prin inducţie matematică. **22.** Suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ se divide cu 9. Să presupunem că suma $k^3 +(k + 1)^3 + (k + 2)^3$ se divide cu 9. Atunci suma $(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = [k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$ se divide evident cu 9, ca fiind suma a doi termeni, fiecare dintre aceştia fiind divizibil cu 9. **23.** $n^5 - n = (n - 1) \cdot n (n + 1)(n^2 + 1)$ este divizibil cu 2 şi cu 3, deci cu 6. Să demonstrăm că $n^5 - n$ se divide cu 5. Fie $d_n = n^5 - n$ şi să considerăm propoziţia „d_n se divide cu 5". Evident, $d_0 = 0$ se divide cu 5. Presupunem că d_k se divide cu 5 şi să demonstrăm că d_{k+1} se divide cu 5. Într-adevăr $d_{k+1} = (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = d_k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Se observă că d_{k+1} se divide cu 5.

24. a) Fie propoziţia $P(n)$: „$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133". Evident, $P(0)$ este adevărată, deoarece $11^2 + 12 = 133$. Să presupunem că $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ se divide cu 133, adică $P(k)$ este adevărată şi să demonstrăm că $P(k + 1)$ este adevărată. Într-adevăr, avem $11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 12^2 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) - (12^2 - 11) \cdot 11^{k+2}$. Observăm că acesta se divide cu 133, ca fiind diferenţa a două numere, fiecare dintre ele fiind divizibil cu 133; b), c), d) se demonstrează analog. **27.** b) Dacă $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$, atunci $2(k + 1)^3 > (k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1$, deoarece această inegalitate se obţine din prima prin adunarea membru cu membru a ei şi a inegalităţii evidente $6k^2 + 6k + 2 > 6k + 6$. **28.** Din $3^k > k^3$, rezultă $3^{k+1} > 3k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$. De aici, rezultă că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, $n \geq 4$. **29.** Pentru $n = 0$, inegalitatea este îndeplinită. Fie $|\sin nx| \leq n|\sin x|$. Atunci: $|\sin(n + 1)x| = |\sin nx \cos x + \sin x \cos nx| \leq |\sin nx||\cos x| + |\sin x||\cos nx| \leq n|\sin x| + |\sin x| = (n + 1)|\sin x|$. Deci $|\sin(n + 1)x| \leq (n + 1)|\sin x|$. Demonstraţia este terminată pe baza inducţiei matematice. **30.** Trebuie să demonstrăm că orice număr natural mai mare decât 8, se poate descompune în suma a două numere, dintre care un multiplu de 3 şi un multiplu de 5. Demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $k = 8$ afirmaţia este adevărată, deoarece $8 = 3 + 5$. Fie afirmaţia adevărată pentru un număr n, adică $n = 3s + 5t$, $s, t \in \mathbf{N}$. Sunt

posibile două cazuri: în primul caz $t = 0$; 2) $t \geq 1$. În primul caz, când $t = 0$, trebuie ca $s \geq 3$. Atunci $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s - 3) + 5(t + 2)$. În cazul al doilea $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s + 2) + 5(t - 1)$. Deci afirmaţia este adevărată pentru $n + 1$. **32.** Pentru $n = 1$ afirmaţia este evident adevărată. Fie adevărată afirmaţia pentru k şi să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Alegem unul din plane, să zicem al $(k + 1)$-lea. Atunci conform problemei precedente planul ales este împărţit de dreptele de intersecţie ale celorlalte k plane cu acesta, în $2k$ părţi. Conform ipotezei inductive, cele k plane rămase împart spaţiul în $k(k - 1) + 2$ părţi. Fiecare parte a planului ales (al $k + 1$-lea) împarte una din părţile spaţiului, date de cele k plane în două părţi. Deci se obţin $k(k - 1) + 2 + 2k = (k + 1)k + 2$ părţi. **33.** Demonstrăm prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 1$, afirmaţia este adevărată, deoarece $1+\frac{1\cdot 2}{2}=2$, iar o dreaptă împarte planul în două părţi. Fie adevărată afirmaţia pentru $n = k$ şi să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem una din cele $k + 1$ drepte pe care o vom numi a $(k + 1)$-a. Din ipoteza inductivă cele k drepte rămase împart planul în $1+\frac{k(k+1)}{2}$ părţi, a $(k + 1)$-a dreaptă taie primele k drepte în k puncte şi de aceea este împărţită de aceste puncte în $k + 1$ părţi. Deoarece cele k puncte obţinute sunt diferite de punctele de intersecţie ale primelor k drepte (între ele), atunci fiecare din aceste părţi împart una din părţile planului în două părţi (date de cele k drepte), adică la $1+\frac{k(k+1)}{2}$ părţi se adaugă încă $k + 1 \Rightarrow$ avem $1+\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ părţi. **34.** Se demonstrează prin inducţie matematică după n, folosind problema precedentă (la trecerea de la pasul k la pasul $k + 1$), analog raţionamentului din problema 33. **35.** Demonstrăm prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 1$, afirmaţia este evident adevărată. Fie adevărată afirmaţia pentru $n = k$ şi să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem unul din cercuri şi atunci, mai întâi, el se intersectează cu fiecare din celelalte k cercuri în cel mult 2 puncte, şi în al doilea rând cele k cercuri rămase împart planul în cel mult $k^2 - k + 2$ părţi (conform ipotezei de inducţie). Punctele obţinute (în număr de cel mult $2k$) de intersecţie ale cercului ales cu celelalte cercuri îl împart în cel mult $2k$ părţi şi fiecare dintre aceste arce împart una din părţile avute ale planului în două. Se obţin cel mult $(k^2 - k + 2) + 2k = (k + 1)^2 - (k + 1) + 2$ părţi. Dacă cercurile sunt două câte două secante, atunci avem egalitate.

36. Pentru $n = 1$ afirmaţia nu necesită demonstraţie. Să demonstrăm că şi pentru $n = 2$ este de asemenea valabilă. Să notăm laturile pătratelor date $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ cu a şi b.



Să presupunem $a \geq b$ şi fie punctele M, N, P, Q pe laturile pătratului $ABCD$, astfel încât $AM = BN = CP = DQ = \frac{a+b}{2}$ şi tăiem pătratul după dreptele MP şi NQ, obţinând patru părţi egale. Aceste părţi se pot aplica pe laturile celui de al doilea pătrat ca în figură, obţinându-se un nou pătrat. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru n pătrate şi să considerăm acum $n + 1$ pătrate. Alegem două oarecare P_1 şi P_2 şi procedând ca la pasul $n = 2$ obţinem din acestea un nou pătrat P'. Astfel am redus numărul pătratelor la n şi aplicăm ipoteza de inducţie pentru pasul n. **37.** Vom face inducţie după numărul l al frontierelor hărţii. Fie $l = 0$, atunci $s = l$, $p = 1$ şi clar $s + p = l + 2$. Să presupunem că teorema este adevărată pentru orice hartă care are n frontiere şi să considerăm o hartă ce conţine $l + 1$ frontiere, s ţări şi p vârfuri. Sunt posibile două cazuri: 1) Pentru orice pereche de vârfuri ale hărţii există un drum unic care le uneşte de-a lungul frontierelor hărţii. În acest caz harta nu are nici un contur închis. Avem $s = 1$. Se arată că pe o astfel de hartă se va găsi cel puţin un vârf aparţinând numai unei singure frontiere. Îndepărtând acest vârf cu unica frontieră care îl are drept capăt, obţinem o nouă hartă în care $l' = l - 1 = n$, $s' = s - 1$, $p' = p - 1$. În virtutea ipotezei inductive $s' + p' = l' + 2 \Rightarrow s + p = l + 2$. 2) Există două vârfuri unite prin mai multe drumuri. În acest caz pe hartă există un contur închis care trece prin aceste vârfuri. Îndepărtând una dintre frontierele acestui contur (fără vârfuri), obţinem o nouă hartă, în care $l' = l - 1 = n$, $p' = p$, $s' = s - 1$. Prin ipoteza inductivă $s' + p' = l' + 2 \Rightarrow s + p = l + 2$. **38.** Să aşezăm poliedrul în interiorul unei sfere de rază suficient de mare şi să proiectăm din centrul sferei, care-l putem considera în interiorul poliedrului toate punctele poliedrului pe sferă. Harta obţinută pe sferă o proiectăm dintr-un punct arbitrar al ei, care nu aparţine nici unei frontiere, pe planul tangent sferei

în punctul diametral opus. Hărţii plane obţinute îi aplicăm teorema lui Euler (problema precedentă). **39.** Pentru $n = 1$, afirmaţia este evident adevărată. Fie adevărată afirmaţia pentru k şi să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Fie pentru aceasta $k + 1$ sfere. Deoarece k sfere intersectează sfera $(k + 1)$-a după k cercuri şi prin urmare împart suprafaţa ei în $k^2 - k + 2$ părţi (vezi problema 38) rezultă că dacă k sfere, două câte două secante, împart spaţiul în N_k părţi, atunci $k + 1$ sfere împart spaţiul în $N_{k+1} = N_k + \left(k^2 - k + 2\right)$ părţi. Rezultă că $N_{k+1} = \frac{k\left(k^2 - 3k + 8\right)}{3} + \left(k^2 - k + 2\right) = \frac{(k+1)\left((k+1)^2 - 3(k+1) + 8\right)}{3}$. Conform inducţiei matematice afirmaţia este adevărată pentru orice $n \geq 1$, număr natural.

Capitolul X
ELEMENTE DE COMBINATORICĂ
BINOMUL LUI NEWTON

1. a) $n = 5$; b) $n = 3$; c) $n = 6$. **2.** a) $n \geq 12$ ($n \in \mathbb{N}$); b) $5 \leq n \leq 11$ ($n \in \mathbb{N}$). **3.** a) $5 \leq n \leq 20$ ($n \in \mathbb{N}$); b) $n \in \{2, 3\}$. **4.** $5! = 120$. **5.** a) $5! : 2 = 60$ moduri; b) $4! = 24$ moduri. **6.** a) $6! - 5! = 600$; b) $5! = 120$; c) $5! - 4! = 96$; d) $4! = 24$; e) $600 - 24 = 576$. **7.** a) 5^4; b) $5! - 4! = 96$. **8.** $\frac{7!}{14} = 360$. **9.** Fie (i, j), $i = 1, 2, \ldots, 8$; $j = 1, 2, \ldots, 8$, careul care se găseşte la intersecţia liniei orizontale i cu linia verticală j (pe tabla de şah). Două turnuri care se găsesc în careurile (i, j) şi (k, l) nu se pot lua unul pe celălalt, atunci şi numai atunci când $i \neq k$ şi $j \neq l$. Se găsesc $8! = 40320$ aşezări posibile diferite ale celor 8 turnuri. **10.** Se găseşte mai întâi că există $k!(n - k + 1)!$ permutări, în care numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ocupă k locuri la rând şi deci numărul cerut în problemă este $n! - k!(n - k + 1)!$.

11. $\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]\right)!\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]\right)!\left(n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]\right)\right)!\left[\frac{n}{6}\right]!$.

12. a) $\frac{n^2 - 11n + 31}{n - 5}$; b) 0; c) 1; d) $n + 3$; e) $\frac{n^2 - n - 2k - 2}{k + 1}$; f) $4k^2$; g)

$\frac{(n-1)!}{(k-1)!} = A_{n-1}^{n-k}$; h) $\frac{n!}{(k-1)!} = A_n^{n-k+1}$. **13.** a) $n = 7$; b) $n = 5$; c) $n = 8 - m, m \in$ $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; d) $n = 12$; e) $n = 9$; **14.** $A_5^3 = 60$ moduri. **15.** $A_6^2 = 30$ dicţionare. **16.** $A_9^5 = 15120$; $4A_8^4 = 8400$. **17.** Numere cu cinci cifre sunt: $A_5^5 - A_4^4 = 96$. Numere cu patru cifre sunt: $A_5^4 - A_4^3 = 96$. Numere cu trei cifre sunt: $A_5^3 - A_4^2 = 48$, cu două cifre sunt: $A_5^2 - A_4^1 = 16$, iar cu o cifră sunt 5. În total sunt 261 numere. **18.** Numărul liniilor poligonale neînchise este egal cu $\frac{1}{2}A_n^{k+1}$, iar al celor poligonale închise este egal cu $\frac{A_n^k}{2n}$. **19.** a) 0; b) $\frac{2(n-k)}{n-1}$. **20.** $n = 9$; $C_9^7 = 36$. **21.** a) $n \in \{3, 14\}$; b) $n = 5$; c) $n = 19$; d) $n = 4$; e) $n = 7$; f) $n = 4$; g) $n = 7$; h) $n = 5$; i) $n = 27$. **22.** a) $n > 6$ ($n \in$ N); b) $1 \le k \le 9$ ($k \in$ N); c) $9 \le k \le 15$ ($k \in$ N); d) $4 \le n \le$ ≤ 13 ($n \in$ N). **23.** $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **24.** $9 \cdot 7 = 63$; $C_9^2 \cdot C_7^2 = 756$. **25.** $C_8^4 = 70$; $3 \cdot C_5^3 = 30$. **26.** $C_6^2 = 15$. **27.** $C_9^5 = 126$; $C_{10}^5 = 252$. **28.** $C_6^3 \cdot$ $\cdot C_9^4 + C_6^4 \cdot C_9^3 + C_6^5 \cdot C_9^2 + C_6^6 \cdot C_9^1 = 4005$. **29.** $C_7^4 \cdot A_8^4 = 58800$. **30.** a) $x =$ $= 5k - 1$, $y = 3k$ ($k \in$ N*); b) $x = 3$, $y = 8$; c) $x = 5$, $y = 5$; d) $x = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{n!}$, $y = \frac{k(k+1)(2k-n+1)}{n^2(n+1)}$. **31.** a), b) Se foloseşte relaţia $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$; c) Folosim $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. **32.** a) $\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$; b) Suma se scrie $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2(k-1)^2}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k^4 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k^3 + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k^2$. Folosim apoi problema 1 din cap. IX. **31.** a) $\frac{n(n^2-1)}{6}$; b) $\frac{n(n+1)(3n^3-3n^2-2n+2)}{60}$

33. Demonstrăm prin inducţie după *n*. Notăm $S_n = 1 + N_1 + N_2 + \ldots + N_{n-1}$. Dacă considerăm numerele 1, 2,..., *n*, *n* + 1, atunci se observă: $S_{n+1} = 1 +$ $+ [N_1 + (n+1)] + [N_2 + (n+1)N_1] + \ldots + [N_{n-1} + (n+1)N_{n-2}] + (n+1)N_{n-1} + n!$

34. a) $1 + C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 2^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1} + 2^n = (1+2)^n = 3^n$; b) Acelaşi rezultat ca la punctul a). **35.** Să notăm cu *S* suma cerută. Împărţind ambii

membri cu $(2n)!$ se obţine $\frac{S}{(2n)!}=\frac{1}{C_{2n}^{0}}-\frac{1}{C_{2n}^{1}}-\frac{1}{C_{2n}^{2}}-\ldots-\frac{1}{C_{2n}^{2n-1}}+\frac{1}{C_{2n}^{2n}}$. Se arată: $\frac{1}{C_{2n}^{k}}=\frac{2n+1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right)$ relaţie pe care o folosim în egalitatea de mai înainte. **36.** Se scrie $S_k=\sum_{l=1}^{k} l!\left(1+l^2\right)=\sum_{l=1}^{k} l!\left(1+l^2+2l-2l\right)=$ $=\sum_{l=1}^{k}\left[(l+1)!(l+1)-2l!l\right]$. **38.** a) $T_8=960x^3a^7$; b) $T_5=126x^2y^2\sqrt{x}$; c) $T_8=-3432\frac{1}{x^4\sqrt[3]{x^2}}$; d) T_7 = $219648a^3b\sqrt{ab}$, T_8 = $-109824a^3b\sqrt[4]{b^3}$. **39.** a) k = 2; b) k = 3; c) k = 16; d) k = 10; e) k = 8. **40.** k = 16. **41.** n = 15. **42.** n = 20. **43.** n = 6. **44.** n = 15, T_6 = $1001 \cdot 3^6$. **45.** n = 8, T_5 = $70(1 - x^2)^2$. **46.** $x_1=\frac{1}{100\sqrt{10}}$, x^2 = 10. **47.** m = 12; **48.** n = 6, x_1 = -1, x_2 = 2. **49.** $x_1=\frac{1}{10^4}$, x_2 = 10. **50.** n = 7, T_5 = $35\,x^{\frac{2}{3}}$. **51.** T_5 = $126\,a^{-1}$. **52.** a) T_{15} = $=-C_{24}^{10}\cdot 36$; b) T_1 = 3^5; T_3 = $C_{10}^{2}\cdot 3^4\cdot 7$; T_5 = $C_{10}^{4}\cdot 3^3\cdot 7^2$; T_7 = $C_{10}^{4}\cdot 3^2\cdot 7^3$; T_9 = $C_{10}^{2}\cdot 3\cdot 7^4$; T_{11} = 7^5. **53.** Sunt 51 de termeni şi anume: T_{4k+1}, $k \in \mathbf{N}$, $0 \le k \le 50$. **54.** $T_i \notin \mathbf{Q}$, $1 \le i \le 25$, $i \ne 1$ şi $i \ne 15$ ($i \in \mathbf{N}$). **55.** Din dezvoltare avem $nm - (m + p)k = 0$, $nm - 11(m + p) = 1$, $nm - 23(m + p) = 5$. Scăzând prima ecuaţie din celelalte două şi făcând câtul se obţine $\frac{k-11}{k-23}=\frac{1}{5}$, de unde k = 8. Apoi, $m + p=-\frac{1}{3}$, $n=-\frac{8}{3m}$ şi deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg şi pozitiv. Lăsăm continuarea pe seama cititorului. **56.** n + 1. **57.** Sunt 6 termeni raţionali. **58.** $-C_7^0C_4^3+C_7^1C_4^2-C_7^2C_4^1+C_7^3C_4^0=-11$. **59.** a) Punem x^4 = y^3 = 1. Atunci dezvoltând după formula binomului lui Newton şi înlocuind x^4 şi y^3 prin 1, obţinem suma căutată a coeficienţilor. Astfel suma coeficienţilor este egală cu $(9 - 8)^{19}$ = 1; b) Suma coeficienţilor dezvoltării $(8x^2 - 6y^3)^8$ este $(8 - 6)^8$ = 256. **60.** $(9-8)^n=1$. **61.** a) Calculăm $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}$ şi obţinem că $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}>1$, pentru $k \le 32$ şi $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}<1$, pentru $k \ge 33$. Deci cel mai mare

este T_{34}; c) $k = 10$. **62.** Se studiază cazurile: n par şi n impar. **63.** Trebuie să găsim un l, astfel încât suma primilor l termeni ai dezvoltării $(1 + 10^{-2})^{10}$ să difere de numărul $(1 + 10^{-2})^{10}$ cu mai puţin de 10^{-3}. Pentru aceasta este suficient ca suma termenilor dezvoltării, începând cu cel de rang $l + 1$, să fie mai mică decât 10^{-3}. Se rezolvă inegalitatea $\sum_{k\geq l} T_{k+1} < 10^{-3}$, adică:

$$\sum_{k\geq l} C_{10}^k \left(10^{-2}\right)^k < 10^{-3} \text{ dar} \sum_{k\geq l} C_{10}^k < 1000 \Rightarrow \sum_{k\geq l} C_{10}^k \left(10^{-2}\right)^k < 10^3 \cdot 10^{-6} < 10^{-3}$$

pentru $l \geq 2$. Se observă că numai doi termeni ai dezvoltării nu sunt de ajuns, aşadar trebuie să luăm neapărat primii trei termeni ai dezvoltării. **64.** Se consideră egalitatea $\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^{6n} = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{6n} = 2^{6n}$. Dezvoltăm membrul stâng după formula binomului lui Newton şi partea reală a dezvoltării care este tocmai $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k}(-3)^k$ este egală cu 2^{6n}. **65.** Se consideră: $(1+\mathrm{i})^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Se dezvoltă $(1+\mathrm{i})^n$ după formula binomului lui Newton şi se egalează părţile reale şi imaginare ale celor doi membri. **66.** Se consideră egalitatea $\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \frac{\cos 2n\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2n\pi}{3}$. **67.** Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $\left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$. **68.** Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $(1+\mathrm{i})^n$. **69.** Avem $(1+x)^n + (1-x)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} x^{2k}$. Coeficienţii din dezvoltare sunt pozitivi. Cea mai mare valoare se poate obţine pentru $x = 1$, când avem 2^n. **70.** a) Fie $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$. Din $C_n^k = C_n^{n-k}$ se obţine $S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}$. Adunând cele două egalităţi, avem $2 \cdot S_n = n\left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n\right) = 2^n \cdot n$, de unde $S_n = 2^{n-1}n$; b) Se proce-

dează ca la punctul a) şi obţinem $S_n = 2^{n-1}(n+2)$; c) $S_n = (n-2)2^{n-1}+1$; d) $S_n = (n+1)2^n$; e) $S_n = 0$; f) Avem $S_n = 4\left(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n\right) - \left(C_n^1 + \right.$ $\left.+ C_n^2 + \ldots + C_n^n\right) = 2^{n-1}n - 2^n + 1$; g) Folosim formula $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, deci $S_n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 - 2\left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) + 3\left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) - \ldots + (-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1} = C_{n-1}^0 -$ $-C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}$. Dacă $n = 1$, $S_1 = 0$ şi dacă $n > 1$, $S_n = 0$; h) $S_n = \dfrac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}\right) = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$; i) $C_n^k = \dfrac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$, obţinem $S_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \ldots + (n+1)C_{n+2}^{n+2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot$ $\cdot\left(C_{n+2}^1 + 2C_{n+2}^2 + \ldots + (n+2)C_{n+2}^{n+2}\right) - \left(C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+2}\right)$. Conform punctelor a) şi b) se obţine: $S_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left[2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1\right] = \dfrac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}$; j) Suma devine $S_n = \dfrac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^2 + \ldots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\right)$. Dar suma dintre paranteze este egală cu 1 şi deci $S_n = \dfrac{1}{n+1}$. **71.** a) Suma este egală cu coeficientul lui x^n din expresia $x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \ldots + x^{n-m}(1-x)^n$, care este egală cu $x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x)^n$. Se obţine că suma căutată este egală cu $(-1)^m C_{n-1}^m$, pentru $m \leq n - 1$ şi este egală cu 0, pentru $m = n$; b) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^k din expresia: $(1+x)^n +$ $+(1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+m}$, care este egală cu $\dfrac{1}{x}\left[(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n\right]$. Rezultă că suma este egală cu $C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$, pentru $k \leq n - 1$ şi este egală cu C_{n+m+1}^{n+1}, pentru $k = n$. c) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ rădăcinile ecuaţiei: $x_k - 1 = 0$, adică $\varepsilon_l = \cos\dfrac{2l\pi}{k} + i\sin\dfrac{2l\pi}{k}$, $l = 1, \ldots, k$. Avem că $\varepsilon_1^s + \varepsilon_2^s +$ $+ \ldots + \varepsilon_k^s$ este egală cu k, dacă $k \mid s$ şi este 0, dacă k nu divide s. Deci

$$\sum_{l=1}^{k}(1+\varepsilon_l)^n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s\left(\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l^s\right)=k\sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}C_n^{tk},\text{ cum } 1+\varepsilon_l=2\cos\frac{l\pi}{k}\left(\cos\frac{l\pi}{k}+i\sin\frac{l\pi}{k}\right)$$

atunci $\sum_{l=1}^{k}(1+\varepsilon_l)^n=\sum_{l=1}^{k}2^n\cos^n\frac{l\pi}{k}\left(\cos\frac{nl\pi}{k}+i\sin\frac{nl\pi}{k}\right)$. Rezultă că suma căutată este egală cu $\frac{2^n}{k}\sum_{l=1}^{k}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{nl\pi}{k}$; d) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ ca la punctul b) şi considerăm suma $\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l^{-1}(1+\varepsilon_l)^n=\sum_{l=0}^{n}C_n^l\left(\varepsilon_1^{l-m}+\ldots+\varepsilon_k^{l-m}\right)$. Se foloseşte faptul că $\varepsilon_1^{l-m}+\ldots+\varepsilon_k^{l-m}$ este egală cu k, dacă $k \mid (l-m)$ şi este egală cu 0, dacă k nu divide $(l-m)$. Se obţine că suma căutată este egală cu $\frac{2^n}{k}\sum_{l=1}^{k}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{(n-2m)l\pi}{k}$, pentru $k>1$. **72.** a) Egalăm coeficienţii lui x^n din cei doi membri ai egalităţii $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$. Se obţine că suma căutată este C_{2n}^n; b) Se calculează coeficientul lui x^n din ambele părţi ale egalităţii $(1-x)^n(1+x)^n=(1-x^2)^n$. Se obţine că suma este 0, pentru n impar, iar pentru $n=2k$, număr par, suma este $(-1)^kC_{2k}^k$; c) Se poate folosi formula $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$. Se obţine că suma căutată este 1, pentru $n=3k$; 0, pentru $n=3k+1$; -1, pentru $n=3k-1$, $k\in\mathbb{N}$; d) Suma căutată este egală cu 2^{2n}; e) Suma este egală cu $\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$.

Capitolul XI
PROGRESII ARITMETICE ŞI PROGRESII GEOMETRICE

1. a) 3, 8, 13, 18, 23; b) -2, 1, 6, 13, 22; c) -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{-1}{120}$; d) 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{-8}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{-24}{5}$; e) $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{10}{16}$; f) 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{10}$; g) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. **2.** a) $-(1)^{n+1}\frac{1}{n}$; b) 0, $\frac{1}{100}$, $\frac{101}{10000}=\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}$,

deci $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{10^2}$, $a_3 = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4}$. În general $a_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^{2n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{2k}}$; c) $\frac{2n \cdot 2(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$; d) $\frac{2 \cdot 3^{n-1}}{5^n}$; e) $\frac{4n-1}{6n-1}$. **3.** a) Din $3n^2 - 2 = 190$, rezultă $3n^2 = 192$, de unde $n = 8$. Deci $a_8 = 190$; b) Obţinem $a_9 = 241$; c) nu este; d) Obţinem că $a_{73} = 15985$. **4.** $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2\alpha$, $a_3 = 3\alpha$, $a_4 = 4\alpha$, $a_5 = 5\alpha$; b) $a_1 = \beta$, $a_2 = 2\beta$, $a_3 = 4\beta$, $a_4 = 8\beta$, $a_5 = 16\beta$; c) $a_1 = \gamma$, $a_2 = 1$, $a_3 = \gamma$, $a_4 = 1$, $a_5 = \gamma$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = \alpha^2 - \beta^2$, $a_4 = \alpha\beta - \beta\alpha^2 + \beta^3$, $a_5 = \alpha^3 - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = 2\alpha\beta$, $a_4 = \beta^2 + 2\alpha^2\beta$, $a_5 = 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3\beta$. **5.** $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 1$, $a_3 = 2^3 + 1$. Se demonstrează prin inducţie matematică că $a_n = 2^n + 1$. **6.** $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$. În general, $a_n = n^2$. Demonstraţia se face prin inducţie matematică. **7.** $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{1}{4}$. În general, $b_n = \frac{1}{n}$. Demonstraţia se face prin inducţie matematică. **8.** a) x_1, x_2, x_3; b) x_1, x_2, x_3, x_4. **9.** Demonstraţia se face prin inducţie matematică. **10.** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{5}{6}$. În general, $x_n = \frac{n+1}{n+2}$. Demonstraţia se face prin inducţie matematică. **11.** $c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$, $c_3 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$ şi se arată prin inducţie că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

12. $a_2 = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}$, $a_3 = \frac{(\alpha^4 - \beta^4) - (\alpha^3 - \beta^3)}{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}$. Formula pentru a_n se demonstrează prin inducţie matematică. **13.** a) Dacă $n = 2k$, atunci $S_{2k} = [0 + 1 + 2 + \ldots + (k-1)] + (1 + 2 + 3 + \ldots + k) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} k^2$

Dacă $n = 2k + 1$, atunci $S_{2k+1} = (0 + 1 + 2 + \ldots + k) + (1 + 2 + \ldots + k) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k(k+1)$. Demonstraţia se face prin inducţie matematică; b) Se poate considera separat fiecare din cazurile; I) p par, q par;

II) p par, q impar; III) p impar, q par; IV) p impar, q impar. **14.** a) 2, -1, -4, -7, -10, $a_n = 2 + (-3)(n-1)$; b) a_1 = 23, a_2 = 35, a_3 = 47, a_4 = 59, a_5 = = 71, $a_n = 23 + 12(n-1)$; c) a_1 = 21, $a_2 = 22\frac{1}{2}$, a_3 = 24, $a_4 = 25\frac{1}{2}$, a_5 = = 27, $a_n = 21 + \frac{3}{2}(n-1)$; d) a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, $a_n = 3 + 4(n-1)$. **15.** Avem $a_4 - a_2 = 2r = 6$, de unde $r = 3$. Obţinem a_1 = = -10, a_3 = -4, a_5 = 2, a_6 = 5. **16.** $a_1 = -13\alpha$. **17.** $n = 8$. **18.** a) $a_1 = -5$, $r = 2$; b) $a_1 = 4$, $r' = 1$ şi $a_1'' = 6$, $r'' = -1$; c) $a_1 = 2$, $r = 2$. **19.** a) S_{100} = 15050; b) S_{100} = 33350. **20.** Se demonstrează că $y_k = \frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{2}$. Se obţine $y_1 = \alpha + \beta$, şi $r = \alpha$. **21.** Avem $S_1 = \alpha + \beta + \gamma = a_1$, $S_2 = 4\alpha + 2\beta + \gamma = a_1 + a_2$, $S_3 = 9\alpha^2 + 3\beta + \gamma = a_1 + a_2 + a_3$. Pentru ca $a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}$, trebuie ca $\gamma = 0$. În acest caz (când $\gamma = 0$), şirul (a_n) este o progresie aritmetică. Avem $a_n = (2n-1)\alpha + \beta$. **22.** $r = \frac{\alpha}{2}$, $a_n = \alpha(2n-1)$. **24.** Se verifică dacă este adevărată relaţia $b_k = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}$; a) este progresie; b) este progresie; c) este progresie; d) nu este progresie; e) nu este progresie; **25.** Se observă că $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$. **26.** $a_1 = a - r$, $a_2 = a$, $a_3 = a + r$. Se aplică teorema lui Pitagora şi se obţine $a = 4r$. Dacă $a_1 = 3r$, $a_2 = 4r$, $a_3 = 5r$, atunci $\frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{4} = \frac{a_3}{5}$. **27.** a) $S_{2k} = -k$, iar $S_{2k+1} = k + 1$; b) $S_{2k} = -2k$, iar $S_{2k+1} = 2k + 1$. **28.** Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ şirul din enunţ. Atunci $a_2 - a_1 = \gamma_1$, $a_3 - a_2 = \gamma_2$, ..., $a_n - a_{n-1} = \gamma_{n-1}$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ este o progresie aritmetică. Adunând relaţiile membru cu membru $\Rightarrow$ $a_n = a_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1}$. Cum $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 4, \ldots$ se obţine $a_n = 1 + \frac{n^2 + n + 2}{2}$. **29.** Din egalitatea $a \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}} + d \cdot \sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}} = b \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}} + c \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}$ se deduce că $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$. **31.** Avem $T_{k+1} = C_m^k a^{m-k} b^k$ şi pentru $k = 5$, $T_6 = 21$. Mai mult,

cum C_m^1, C_m^2, C_m^3 sunt în progresie aritmetică, rezultă $m = 7$. Se obţine ecuaţia $C_7^5 \cdot 2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 21$, adică $2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 1$ de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. **32.** Ecuaţia din enunţ are exact patru rădăcini $\Leftrightarrow$ ecuaţia $y^2 + ay + a^4 = 0$ are două rădăcini pozitive y_1, y_2 cu $y_1 \neq y_2$. Dacă $y_1 < y_2$ atunci ecuaţia are rădăcinile $-\sqrt[4]{y_2}$, $-\sqrt[4]{y_1}$, $\sqrt[4]{y_1}$, $\sqrt[4]{y_2}$ scrise în ordine crescătoare. Faptul că acestea sunt în progresie aritmetică înseamnă că $-\sqrt[4]{y_1} - \left(-\sqrt[4]{y_2}\right) = \sqrt[4]{y_1} - \left(\sqrt[4]{y_1}\right) = \sqrt[4]{y_2} - \sqrt[4]{y_1}$ sau $\sqrt[4]{y_2} = 3\sqrt[4]{y_1}$, adică $y_2 = 81y_1$. Folosind relaţiile lui Viete, se obţine că $a = -\frac{9}{82}$ îndeplineşte condiţiile problemei. **33.** a) $b_1' = 3$, $b_2 = -6$, $b_3 = 12$, $b_4 = -24$, $b_5 = 48$; b) $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 24$, $b_5 = 48$; c) $b_1' = \frac{5^7}{3^5}$, $b_2' = \frac{5^6}{3^4}$, $b_3' = \frac{5^5}{3^3}$, $b_4' = \frac{5^4}{3^2}$, $b_5' = \frac{5^3}{3}$; $b_1'' = -\frac{5^7}{3^5}$, $b_2'' = \frac{5^6}{3^4}$, $b_{13}'' = -\frac{5^5}{3^3}$, $b_4'' = \frac{5^4}{3^2}$, $b_5'' = -\frac{5^3}{3}$ d) $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 20$, $b_4 = 40$, $b_5 = 80$. **34.** $b_2 = 2\sqrt{3}$, $b_3 = 6\sqrt{2}$, $b_5 = 36\sqrt{2}$, $b_6 = 72\sqrt{3}$. **35.** a) 1, 2, 4, 8, 16 şi -16, -8, -4, -2, -1; b) 625, -375, 225, -135, 81. **36.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **37.** a) Da; b) Da; c) dacă $\beta \neq 0$, nu; d) Da; e) Da. **40.** Din relaţia dată se obţine $y^2 = xz$. **41.** Scriem suma (notată cu S) astfel:

$$\begin{aligned} S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ +2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ +2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +2^{98} + 2^{99} + \\ +2^{99}. \end{aligned}$$

Deci

$$S = \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} + \frac{2(2^{99}-1)}{2-1} + \frac{2^2(2^{98}-1)}{2-1} + \ldots + \frac{2^{98}(2^2-1)}{2-1} + \frac{2^{99}(2-1)}{2-1} =$$
$$= (2^{100}-1) + (2^{100}-2) + (2^{100}-2^2) + \ldots + (2^{100}-2^{99}) = 100 \cdot 2^{100} -$$
$$-(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 99 \cdot 2^{100} + 1.$$

42. Se foloseşte formula $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$, pentru $x \neq 1$. **44.** Avem $3 = \frac{10-1}{3}$, $33 = \frac{10^2-1}{3}$,

..., $\underbrace{33...3}_{n \text{ ori}} = \frac{10^n - 1}{3}$. Obţinem: $S_n = \frac{10(10^n - 1)}{27} - \frac{n}{3}$. **45.** Dacă r este raţia progresiei aritmetice, iar q a celei geometrice, se arată că $r \geq 0$, $q \geq 1$. Pentru a demonstra că $a_n \leq b_n$ observăm $a_1q^{n-1} - a_1 - (n-1)r = a_1(q-1) \cdot \left[q^{n-2} + q^{n-3} + ... + q + 1 - (n' - 1)\right]$, iar numărul din paranteza mare este pozitiv. Egalitatea tuturor termenilor celor două progresii are loc numai în cazul în care $q = 1$ (şi deci $r = 0$). **47.** $3^{\frac{12}{5}}$, $3^{\frac{7}{5}}$, $3^{\frac{2}{5}}$, $3^{\frac{-3}{5}}$, $3^{\frac{-8}{5}}$. **48.** $S_1 = 1 \cdot 13 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 13 + ... + 76 \cdot 13$ este suma numerelor ≤ 1000 care se divid cu 13. $S_2 = 1 + 2 + 3 + ... + 1000$ este suma tuturor numerelor ≤ 1000. Suma căutată este $S_2 - S_1 = 462462$. **49.** Primul termen este 2 sau $\frac{62}{5}$. **50.** $a = 100$, $b = 20$, $c = 4$. **51.** Primul termen este 70 sau 10. **53.** Dacă n este par, atunci $a_1a_2 ... a_n = (a_1a_n)(a_2a_{n-1})... = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$. Dacă n este impar $\Rightarrow a_1a_2 ... a_n = (a_1a_n)(a_2a_{n-1})...\left(a_{\frac{n-1}{2}}a_{\frac{n+3}{2}}\right)a_{\frac{n+1}{2}} = (a_1a_n)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{a_1a_n} = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$. **54.** $b = \frac{a+c}{2}$, $c^2 = ab$, $a = \frac{2bc}{b+c}$. Deducem că b şi c trebuie să verifice relaţia $2b^2 - bc = c^2$. **55.** Avem $a_1 + a_2 + ... + a_{2n} = 5(a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$; obţinem $q = \frac{1}{4}$. **56.** Deducem $2a_1 + 9b_1 = 31$, $b_1(1 + a_1) = 9$, de unde $a_1 = \frac{25}{2}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ şi $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. **57.** Avem $a_1 + r = b_1q$, $a_1 + 2r = b_1q^2 - 8$. Dar $a_1 = b_1$ şi se obţine $a_1 = \frac{r}{q-1}$, $a_1 = \frac{2r+8}{q^2-1}$. Deci r şi q satisfac relaţia $\frac{r}{q-1} = \frac{2r+8}{q^2-1}$, iar $a_1(= b_1)$ este arbitrar. **58.** Avem $a_1 + r = \sqrt{a_1(a_1 + 3r)}$, de unde $a_1 = r$. Aşadar $a_4 = 4a_1$, $a_6 = 6a_1$, $a_9 = 9a_1$ şi evident $a_4 \cdot a_9 = a_6^2$, $q = \frac{3}{2}$. **59.** Dacă $0 < q < 1$ este raţia progresiei geo-

metrice, atunci $p=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\dots\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{a_1\cdot(a_1q^2)\dots(a_1q^{2n-2})}{(a_1q)(a_1q^3)\dots(a_1q^{2n-1})}$. După efectuarea calculelor obţinem $p=\frac{1}{q^n}<\frac{1}{q^{\frac{2n+1}{2}}}=\sqrt{\frac{a_1}{a_1q^{2n+1}}}=\sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}$. **60.** Numărul boabelor de grâu este $1+2+2^2+\dots+2^{63}=2^{64}-1$. **62.** $2^{64}-1$. **63.** a) Se efectuează ridicările la pătrat şi se însumează. Vom obţine: i) $\frac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}-1)}{a^{2n}(a^2-1)}+2n$, ii) $\frac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}-1)}{a^{2n}(a^2-1)}-2n$. **64.** a) Scriem

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\dots$$

$$+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{r}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{r}+\dots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{r}=$$

$=\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)$; b) $\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}\left(\sqrt{q}-1\right)}+\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{q}}\right)}+\dots+\frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}\left(1-\sqrt{\frac{1}{q}}\right)}=$

$=\frac{1}{\sqrt{q}-1}+\underbrace{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}+\dots+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}}_{n-1}=\frac{1+(n-1)\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}$. **65.** $S_1=\frac{1}{a_1^p(q^p+1)}\cdot$ $\cdot\left(1+\frac{1}{q^p}+\dots+\frac{1}{q^{2p}}\right)$ şi $S_2=\frac{1}{a_1^p(q^p-1)}\left(1+\frac{1}{q^p}+\dots+\frac{1}{q^{2p}}\right)$ deci $\frac{S_1}{S_2}=\frac{q^p-1}{q^p+1}$, q fiind raţia progresiei geometrice. **66.** Avem $a_k=S_k-S_{k-1}=(2k-1)a+$ $+b$. Este clar că şirul (a_k) este o progresie aritmetică în care $a_1=a+b$ şi raţia $r=2a$. **68.** Avem $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{2\cdot 3}$. Presupunem că pentru $k<n$, avem $a_k=\frac{1}{k!}$ şi să arătăm că $a_n=\frac{1}{n!}$. Într-adevăr, $a_0a_n+a_1a_{n-1}+\dots+a_ka_{n-k}+$ $+\dots+a_na_0=a_n+\frac{1}{1!}\frac{1}{(n-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}+\dots+\frac{1}{1!}\frac{1}{(n-1)!}+a_n=2^na_n$. Deci

$\frac{1}{n!}\left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n\right) - \frac{1}{n!} + 2a_n = 2^n a_n$, sau $\frac{2^n - 2}{n!} + 2a_n = 2^n a_n$, de unde $a_n = \frac{1}{n!}$. Folosind varianta a doua a metodei inducţiei matematice $\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$, pentru orice n. **69.** a) Avem $a_{k+1}^p - a_k^p = (a_k + r)^p - a_k^p =$ $= C_p^1 r a_k^{p-1} + C_p^2 r^2 a_k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_k + C_p^p r^p$, $p \geq 1$, fiind un număr natural. Considerăm acum relaţiile, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, adică

$$a_2^p - a_1^p = C_p^1 r a_1^{p-1} + C_p^2 r^2 a_1^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_1 + C_p^p r^p$$

$$a_3^p - a_2^p = C_p^1 r a_2^{p-1} + C_p^2 r^2 a_2^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_2 + C_p^p r^p$$

....

$$a_{n+1}^p - a_n^p = C_p^1 r a_n^{p-1} + C_p^2 r^2 a_n^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_n + C_p^p r^p .$$

Adunând aceste relaţii, membru cu membru, obţinem relaţia cerută. b) Pentru $p = 1$, relaţiile ne dau $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r$, ..., $a_n - a_{n-1} = r$, ceea ce ne arată că $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică cu raţia r. **70.** a) Avem $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Se verifică uşor că pentru orice k, $2 \leq k \leq n - 1$, avem $(b_{k-1} - q)(b_{k+1} - q) = (b_k - q)^2$, deci $b_1 - q, b_2 - q, \ldots, b_n - q$ sunt în progresie geometrică. Raţia acestei progresii este egală cu α. Avem $b_n - q = (b_1 - q)\alpha^{n-1}$, de unde $b_n = (b_1 - q)\alpha^{n-1} + q$, unde $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$; b) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = (b_1 - q) + (b_2 - q) + \ldots + (b_n - q) + nq$. Folosind punctul a) se obţine $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{(b_1 - q)(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} + nq$, unde $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$. **71.** Punând $f(n) = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k}$, avem $f(n+1) - f(n) = (k+1) r a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+k}$, unde r este raţia. Dar $S = a_1 a_2 \ldots a_k + \left[(f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + \ldots + (f(n+1) - f(n))\right] + \frac{1}{(k+1)r} \Rightarrow S = a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{a_{n+1} \ldots a_{n+k-2} - a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{(k+1)r}$.

72. Punem $f(n) = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-2}}$ şi procedăm ca la exerciţiul precedent,

folosind diferenţele $f(n) - f(n+1)$. Avem $S = 1\frac{1}{(k-1)d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k-1}}\right)$ unde d este raţia progresiei. **73.** a) Calculăm $qS_1 - S_1$ şi găsim $qS_1 - S_1 = \frac{q^{n+1}-q}{q-1} + nq^{n+1}$, de unde $S_1 = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}q}{(q-1)^2}$. Procedând analog ca la a) găsim $S_2 = 2\frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^3} - \frac{(2n-1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2} - \frac{n^2q^{n+1}}{q-1}$.

74. Se observă că $a_{k+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1}$. Se calculează apoi, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1}\right)$, se găseşte $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = 2\cdot\frac{2^n S_{n+1}}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}$, de unde rezultă relaţia căutată.

Capitolul XII
NOŢIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. a) 9; b) 1; c) 5; d) 8; e) 15; f) 20; g) 735. **2.** a) 40; b) 60; c) 50; d) 2. **3.** 149. **4.** 126. **5.** $a = 12$, $b = 48$ sau $a = 24$, $b = 36$ sau $a = 36$, $b = 24$ sau $a = 48$, $b = 12$. **6.** $a = 6$, $b = 216$ sau $a = 24$; $b = 54$. **7.** $a = 184$, $b = 176$ sau $a = 56$, $b = 16$. **8.** 1, 4, 8, 4, 4, 7, 5. **9.** a) 1; b) 1. **10.** 7^{7^7} este de forma $4k + 3 \Rightarrow 7^{7^{7^7}} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. **11.** $n \geq 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 1! + 2! + \ldots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. Un pătrat perfect are ultima cifră 0 sau 1 sau 4 sau 5 sau 6 sau 9. Pentru $n = 4$, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ nu este pătrat perfect. **12.** n este de forma $7k$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$ Se calculează n^3 pentru fiecare caz în parte. **13.** $n = 1$, restul este 2; $n = 2k$, restul este 2; $n = 2k + 1$ $(k \geq 1)$ restul este 0. **14.** a) Fie $d = (5n + 3, 8n + 3) \Rightarrow d \mid -8(5n + 3) + 5(8n + 5) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$; b) $d = (33n + 4, 22n + 3) \Rightarrow d \mid 3(22n + 3) - 2(33n + 4) \Rightarrow d = 1$. **15.** Se face analog cu 14. **16.** Fie $d = (5a + 17b, 2a + 7b)$ şi $d' = (a, b)$; $d \mid 5(2a + 7b) - 2(5a + 17b) \Rightarrow d \mid b$; $d \mid 7(5a + 17b) - 17(2a + 7b)$, rezultă $d \mid a \Rightarrow d \mid d'$, dar $d' \mid d \Rightarrow d = d'$. **17.** $(a + b, a - b) = 2$ dacă a, b sunt prime impare;

$(a + b, a - b) = 1$ dacă a sau b este egal cu 2. **18.** Se scrie $a = 7k + r$ ($0 \leq \leq r \leq 6$) şi $b = 7l + s$ ($0 \leq s \leq 6$). Se arată că $7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow r = s = 0$. **19.** şi **20.** Se scrie $n = 6k + r$ cu $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **21.** $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 2$; dacă n este impar $\Rightarrow 1^n + 4^n \equiv 2^n + 3^n \pmod 5 \Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + + 4^n \equiv 0 \pmod{10}$. **23.** $\frac{(m+n)!}{m!n!} = C_{m+n}^n$. **24.** $5 \mid n^2 - 3n + 6 \Rightarrow 5 \mid n^2 + + 2n + 6 \Rightarrow 5 \mid (n + 1)^2 + 5 \Rightarrow 5 \mid (n + 1)^2 \Rightarrow 5 \mid n + 1 \Rightarrow n = 5k - 1$. **25.** $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2) \Rightarrow 6 \mid n(n + 1)(n + 2)$. **26.** $n = 7k + 1$ sau $n = 7k + 3$; **27.** $n = 3k \pm 1$. **28.** $n = 3k \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+1} + 2^{3k+2} \equiv \equiv 3 + 2^2 \equiv 0 \pmod 7$; $n = 3k + 1 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+3} + 2^{3k+3} \equiv 27 + +8 \equiv 0 \pmod 7$, $n = 3k + 2 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+5} + 2^{3k+4} \equiv 3^5 + 2^4 \equiv 0 \pmod 7$. Pentru celălalt exerciţiu se ţine cont că $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$. **29.** $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n} \equiv 2^{4n+1} + 3 \cdot (-1)^{2n} \equiv (2^4)^n \cdot 2 + 3 \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod 5$. **30.** $153^n + 45^n - 28^n \equiv 1 + 1 - 0 \equiv 0 \pmod 2$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0 \pmod 5$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 11^n + 11^n \equiv 0 \pmod{17}$. Deci numărul este divizibil cu $2 \cdot 5 \cdot 17 = 170$. **31.** şi **32.** Se consideră cazurile $n = 3k$, $n = = 3k + 1$, $n = 3k + 2$. **33.** $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 3 \cdot 9^n + 4a64^n \equiv 3(-2)^n + +4a(-2)^n \equiv (-2)^n(3 + 4a) \Rightarrow 11 \mid 4a + 3 \Rightarrow a = 11k + 2$. **34.** Se dezvoltă după binomul lui Newton, $(n+1)^n$. **35.** $C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$. Cum $k < p \Rightarrow$ este prim cu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \Rightarrow p \mid C_p^k$. **36.** $2^p - 2 = (1+1)^p < 2 = = C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^{p-1}$ şi se foloseşte 35. **37.** $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + +1) \Rightarrow a = 2$. Dacă $k = mn \Rightarrow 2^{mn} - 1 = (2^m)^n - 1 = (2^m - 1)((2^m)^{n-1} + \ldots + +1) \Rightarrow 2^k - 1$ nu este prim. Deci, trebuie k să fie un număr par. **38.** a impar $\Rightarrow a^n + 1$ este par $\Rightarrow$ nu este număr prim, contradicţie. Scriem $n = 2^t n'$ cu n' impar $\Rightarrow a^n + 1 = \left(a^{2^t}\right)^{n'} + 1 = \left(a^{2^t} + 1\right)\left(\left(a^{2^t}\right)^{n'-1} + \ldots + 1\right) \Rightarrow \Rightarrow n' = 1 \Rightarrow n = 2^t$. **39.** 3 nu divide $3n^2 - 1$. Pentru a arăta că 5 nu divide pe $3n^2 - 1$ se scrie că n este de forma $5k$, $5k \pm 1$, $5k \pm 2$ şi se calculează $3n^2 - 1$. Analog, pentru 7. **40.** Se scrie $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$;

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ unde $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ şi $p_1, p_2, \dots, p_n$ sunt numere prime. Se obţine $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \leq \dots$ oricare ar fi $1 \leq i \leq n$. Din aceste inegalităţi se deduce că $\alpha_i = \beta_i$ ($1 \leq i \leq n$) $\Rightarrow a = b$. **41.** Orice număr de forma $4k - 1$, în descompunerea sa în factori primi conţine un factor prim de forma $4l - 1$. Presupunem că există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \dots, p_n$ de forma $4k - 1$. Fie $N = 4 p_1 p_2 \dots p_n - 1$. Există un număr prim p de forma $4t - 1$ care divide pe $N \Rightarrow$ există $1 \leq k \leq n$ astfel încât $p = p_k \Rightarrow p_k \mid N \Rightarrow p_k \mid -1$, contradicţie. **42.** Acelaşi raţionament ca la problema 41. **43.** $E = (n^2 + 3n + 1)^2$. **44.** $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{m} = \frac{p}{q} - \sqrt{n} \Rightarrow m = \frac{p^2}{q^2} + n - 2\frac{p}{q}\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbf{Q}$. Fie $n = p_1 p_2 \dots p_t$, p_i prime şi $\sqrt{n} = \frac{r}{s} \Rightarrow p_1 p_2 \dots p_t = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow p_i \mid r\ (\forall)\, i,\ 1 \leq i \leq t \Rightarrow$ $\Rightarrow p_i \mid s \Rightarrow \frac{r}{s}$ nu este ireductibilă. **45.** $p \geq 5 \Rightarrow p = 6k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 36k^2 \pm$ $\pm 12k + 1 = 12(3k^2 \pm k) + 1$. **46.** Dacă $p = 3k \pm 1 \Rightarrow p^2 = \mathcal{M}3 + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8p^2 + 1$ se divide cu 3 deci nu este prim. Deci $p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 73$, $8p^2 - 1 = 71$. **47.** (0, 0); (2, 2). **48.** $(x - 2)(y - 2) = 4$ şi rezultă soluţiile: (3, 6); (4, 4); (6, 3). **49.** Se scrie $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = xy + 1$. Dacă $x > 2$ şi $y >$ $> 2 \Rightarrow x^2 - 1 > x + 1$ şi $y^2 - 1 > y + 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) > (x + 1)(y + 1) >$ $> xy + 1$. Dacă $x = 2 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y$ nu este natural. Dacă $x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$, nu este natural. **50.** (285, 5); (180, 10), (5,15). **51.** $\left[\sqrt{x}\right] = \frac{x-1}{4}$. Se ţine cont că $\sqrt{x} - 1 < \left[\sqrt{x}\right] \leq \sqrt{x}$. Se obţine $x = 13$ şi $x = 17$. **52.** Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $12 \mid n^4 - n^2 - 24$. **53.** Dacă $n = p^\alpha m$ cu $m > 1$ şi $(p, m) = 1$, atunci p nu divide pe C_n^p. Acum, dacă $d = \left(C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}\right)$ şi $d > 1$; există un număr prim q cu $q \mid d$. Cum $d \mid C_n^1 \Rightarrow q \mid n$ şi putem scrie $n = q^\alpha m$ cu $(q, m) = 1$ şi $m > 1$. Dar q nu divide $C_n^{q^\alpha}$ şi deci q nu divide d, contradicţie. Deci $d = 1$. **54.** Dacă $n = p^m$, atunci se arată că $(\forall)k$, $1 \leq k \leq n - 1$, p divide $C_{p^m}^k$. Apoi se arată că p^2 nu divide pe

$C_{p^m}^{p^{m-1}}$. **55.** Fie N numărul format din ultimile 2 cifre ale lui 2^{999}. Avem $2^{999} \equiv N \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 2N \pmod{25}$. Dar $2^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv$ $\equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2N \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow N \equiv 13 \pmod{25} \Rightarrow N = 13 + 25k$. Cum $4 \mid 2^{999} \Rightarrow 4 \mid N \Rightarrow 4 \mid 13 + 25k \Rightarrow k = 3 \Rightarrow N = 88$. **56.** $(2k + 1) +$ $+ (2k + 2) + \ldots + [2k + (2n - 1)] = 2nk + n^2 = n(n + 2k)$. **57.** $n^4 + n^2 + 1 =$ $= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ şi fiecare factor este strict mai mare ca 1. **58.** Scriem $2^{2^n} - 1 = \left(2^{2^{n-1}} - 1\right)\left(2^{2^{n-1}} + 1\right)$. Dacă $A = 2^{2^{n-1}} - 1$, $B = 2^{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow A$ şi B sunt prime între ele. Se demonstrează afirmaţia prin inducţie ţinându-se cont de consideraţiile făcute. **59.** Se ţine cont că orice divizor d al lui n este de forma $d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}$ unde $0 \le l_i \le k_i$ $(\forall) i$, $1 \le i \le n$. **60.** $N = \overline{a_{n-1} \ldots a_0} = 10^{n-1} a_{n-1} + \overline{a_{n-2} \ldots a_0}$. Dar $a_{n-2} a_{n-3} \ldots a_0 < 10 \cdot 10 \ldots 10 =$ $= 10^{n-1} \Rightarrow N > a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$. **61.** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, $n + 1$ numere. Pentru fiecare a_i, există un număr natural $\alpha_i \ge 0$ astfel încât $n + 1 \le 2^{\alpha_i} a_i \le$ $\le 2n$. Rezultă că există i, j astfel încât $2^{\alpha_i} a_i = 2^{\alpha_j} a_j$. Dacă $\alpha_i \le \alpha_j \Rightarrow a_i = 2^{\alpha_j - \alpha_i} a_j \Rightarrow a_j \mid a_i$. **62.** Avem $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c) \cdot$ $\cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$. Cum $6 \mid a + b + c$ rezultă că a, b sau c este par rezultă că $6 \mid 3abc$. **63.** Dacă $m = n + 2$ rezultă $(n^2 + 2n +$ $+ 2) \mid n^4 + 4$ şi $n^2 + 2n + + 2 \mid m^4 + 4$. **65.** În 50!, 2 are exponentul egal cu $\sum_{\alpha \ge 1} \left[\frac{50}{2^\alpha}\right] = \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$

În 100!, 2 are exponentul egal cu 97. **66.** Scriem $n + k = 2^{\alpha_k} u_k$, unde u_k este impar $(1 \le k \le m)$. Fie α_{k_0}, cel mai mare dintre toţi α_k. Se arată că α_k este unic. În continuare:

$$N = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pm 1}{n + k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pm 1}{q^{\alpha_k} u_k} = \frac{\text{Suma de numere pare} \dot{+} \text{un numar impar}}{q^{\alpha_{k_0}} \cdot u}$$

unde u este impar. Deci $N = \frac{p}{q}$, unde p este impar şi q este par $\Rightarrow N \notin \mathbf{Z}$.

67. Se observă că $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5 = (n - 1)n(n + 2) + 5 = 8k + 5$. Dar orice pătrat perfect este de forma $8k + 1$. **68.** Dintre numerele a_1, a_2, $\ldots$, a_9, 5 sunt impare şi 4 pare, de aceea trebuie să avem un factor de forma $a_k - k$, cu a_k impar şi k tot impar. **69.** Cubul unui număr întreg nedi-

vizibil cu 9 este de forma $9k + 1$. Dacă nici unul din numerele a, b sau c nu este divizibil cu 9 înseamnă că $a^3 + b^3 + c^3$ este de forma $9k' \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9 pentru nici o combinaţie de semne. **70.** Numerele $n = 65k \pm 4$, cu $k \in \mathbf{Z}$, satisfac condiţiile. **71.** A se vedea 61. **72.** Se demonstrează prin inducţie după n. Pentru $n = 1$ obţinem că din orice 3 numere se pot alege două cu suma pară. Dacă avem $2^{n+1} - 1$ numere le împărţim în $2^n - 1$ grupe de câte două iar cel de-al ($2^{n+1} - 1$)-lea număr îl punem în prima grupă. Din aceste trei numere extragem două cu suma număr par. Numărul rămas îl aşezăm în grupa a doua apoi repetăm raţionamentul ş.a.m.d. **73.** Se ţine cont de formula care dă numărul tuturor divizorilor unui număr (vezi problema 59). **74.** Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$; $p_1, p_2, \dots, p_r$ numere prime rezultă numărul divizorilor pozitivi ai lui n este $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_r + 1) \Rightarrow 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_r + 1) =$ = numărul tuturor divizorilor. Acest număr este de forma $4m + 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha_i + 1$ este impar $(\forall)i, 1 \le i \le r \le \alpha_i$ este par $(\forall)i$, $1 \le i \le r \Leftrightarrow |n|$ este un pătrat perfect. **75.** Fie n prim şi $n = 10^k + 10^{k-1} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^{k+1} - 1}{9}$. Suma cifrelor lui n este $k + 1$. Dacă $k + 1$ nu este prim $\Rightarrow$ $\Rightarrow k + 1 = r \cdot S$, cu $r > 1$ şi $S > 1 \Rightarrow n$ nu este prim. **76.** De exemplu, $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)$. **77.** Dacă $m \ge n$ scriem $m = nq_1 + r_1$ cu $0 \le r_1 < n$. Dacă $d = (a^m - 1, a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^m - a^n \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid a^{m-n} - 1 \Rightarrow d \mid (a^{m-n} - 1) - (a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^{m-2n} - 1$ ş.a.m.d. rezultă $d \mid a^{m-nq} - 1 \Rightarrow d \mid a^{r_1} - 1$. Scriem acum $n = r_1 q_2 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$. La fel ca mai sus obţinem $d \mid (a^{r_2} - 1)$. Aplicând algoritmul lui Euclid obţinem $d \mid a^{(m,n)} - 1$. Este clar că $a^{(m,n)} - 1$ divide pe $a^m - 1$ şi pe $a^n - 1$ şi deci $d = a^{(m,n)} - 1$. **78.** Fie $N = n! - 1$. Se arată că $(N, k) = 1$, $(\forall)k$, $1 \le k \le n$. Deci N are în descompunerea sa un număr prim mai mare ca n. **79.** Dacă $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}$, rezultă $a + b + 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) \in \mathbf{Q}$, rezultă $\sqrt[3]{ab} \in \mathbf{Q} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a, b$ sunt cuburi perfecte. **80.** $2^{30} \equiv 0 \pmod 8$. $2^{30} = 4^{15} = (5 - 1)^{15} = \mathcal{M}5^3 - C_{15}^2 5^2 + C_{15}^1 5 - 1 = \mathcal{M}5^3 + 74$.

Deci $2^{30} = 824 \pmod{1000}$. **81**. $39^{30} = (40 - 1)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2 + 40C_{30}^1 - 1 = \mathcal{M}10^3 + 199$; $38^{30} = (40 - 2)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2 2^{28} + 40C_{30}^1 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 200 \cdot 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99 \cdot 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99824 = \mathcal{M}10^3 + 576$; $39^{30} - 38^{30} = \mathcal{M}1000 + 199 - 576 = \mathcal{M}1000 + 623$. Deci ultimele 3 cifre sunt 6, 2, 3.

Capitolul XIII
POLINOAME CU COEFICIENŢI COMPLECŞI
ECUAŢII ALGEBRICE

1. $q = X^3 - X - 4$, $r = 8$; b) $q = X + 6$, $r = 9X^2 + 5X - 5$; c) $q = X^4 + 2X^3 + 2X + 11$, $q = 2X - 8$; d) $q = X^5 + X^3 - X^2 + 9X - 5$, $r = 35X^2 - 29X + 6$; **2.** $q = 2X^3 - X^2 + 4X - 3$, $r = 6$; b) $3X^4 + 2X^3 + 11X^2 + 22X + 45$, $r = 93$; c) $-2X^5 + 14X^4 - 47X^3 + 141X^2 - 423X + 1272$, $r = -3809$; d) $q = 2X^2 + 4X - 9$, $r = \frac{27}{2}$. **3.** $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. **4.** Pentru $m \neq -1$ şi $m \neq 2$ (rădăcinile ecuaţiei $m^2 + 3m + 2 = 0$) gradul polinomului este 4; pentru $m = -1$ gradul polinomului este zero; pentru $m = -2$ gradul polinomului este doi. **5.** $f\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{41}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{41}}\right) = 20$. **6.** Se aplică binomul lui Newton şi se obţine $f\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right) = 5$. **7.** $f\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right) = 9$. **8.** $f\left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\right) = 16$. **9.** I) Folosind binomul lui Newton se calculează $f(a + f(a))$ şi se obţine: $f(a)[1 + a_1 + 2a_2 a + a_2 f(a) + \ldots]$; II) $a = ka_0$, $k \in \mathbf{Z}$. **10.** $f = kX$, $k \in \mathbf{R}$. **11.** $f(2) = 4$ şi se găseşte $m = -\frac{3}{2}$. **12.** $f(1) = 5$, $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. **13.** Polinomul de grad minim este $f = aX + b$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -3$ şi se găseşte $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. **14.** Scriem $f = (X - a)(X - b)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(a) = \alpha a + \beta$ şi $f(b) = \alpha b + \beta$. Apoi se rezolvă sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a) \\ \alpha b + \beta = f(b) \end{cases}$. **15.** Scriem $f = (X^2 + 1)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(i) =$

$= \alpha + \beta$ unde $f(\mathrm{i}) = (a_1 - a_2 + a_4 - a_6 + ...) + \mathrm{i}(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - .....)$. **16.** $f(-2) = 0$, $m = -32$. **17.** $f(1) = 0$, $q = X^4 - 3X^3 - 2X + 3$. **18.** a) $f(-1) = (-2)^n - 2^n = 0$; b) $(X-1)^n - (X+3)^n = [(X+1)-2]^n - [(X+1)+2]^n = -(X+1) \cdot \left[C_n^1(X+1)^{n-2} \cdot 2 + C_n^3(X+1)^{n-4} \cdot 2^3 + C_n^5(X+1)^{n-6} \cdot 2^5 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1}\right]$, pentru $n = 2k$. **19.** $f(\mathrm{i}) = (\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 1)^{4n+1} - \mathrm{i} = \mathrm{i}^{4n+1} - \mathrm{i} = 0$, $f(-\mathrm{i}) = 0$. **20.** Scriem $f = nX^{n+1}(X-1) - X(X^n - 1) = (X-1)(nX^{n+1} - X^n - X^{n-1} - \ldots - X)$. **21.** Scriem $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3 = (X-1)\,[(X^n - 1) + (X^{n-1} - 1) + (X^{n-2} - 1)$. **22.** *Metoda I.* Scriem $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n-3} = [2(X^2+1) + X]^{2n-1} + [2(X^2+1) - X]^{2n+3}$. Dezvoltând după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{2n-1} - X^{2n+3}$ se divide prin $X^2 + 1$. $f = X^{2n-1} - X^{2n+3} = X^{2n-1}(1 - X^4) = X^{2n-1}(1+X^2)(1-X^2)$. *Metoda a II-a.* Se aplică teorema lui Bézout; se calculează $f(\mathrm{i})$ şi $f(-\mathrm{i})$; $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^{2n-1} + \mathrm{i}^{2n+3} = \mathrm{i}^{2n-1}(1 + \mathrm{i}^4) = 0$. La fel, pentru $f(-\mathrm{i})$. **23.** Fie ε o rădăcină oarecare a polinomului $X^2 + X + 1$. Se aplică teorema lui Bézout $f(\varepsilon) = \varepsilon^{6n-1} + \varepsilon + 1 = \frac{\varepsilon^{6n}}{\varepsilon} + \varepsilon + 1 = \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon}{\varepsilon} = 0$. **24.** *Metoda I:* Scriem

$$(X^4 - X - 1)^{2n+1} + (X^4 + X - 1)^{2n+5} = [(X^4 - 1) - X]^{2n+1} + [(X^4 - 1) + X]^{2n+5}.$$

Aplicând binomul lui Newton rezultă că este suficient să arătăm că: $(-X)^{2n+1} + X^{2n+5}$ se divide prin $X^2 + 1$. Dar $-X^{2n+1} + X^{2n+5} = -X^{2n+1}(1 - X^4)$. *Metoda II:* $f(\mathrm{i}) = (1 - \mathrm{i} - 1)^{2n+1} + (1 + \mathrm{i} - 1)^{2n+5} = (-\mathrm{i})^{2n+1} + \mathrm{i}^{2n+5} = 0$. **25.** *Metoda I:* $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X = [(X^2 - 1) + X]^{4n+1} - X$. Dezvoltând după binomul lui Newton se constată că este suficient ca $X^{4n+1} - X$ să se dividă prin $X^2 - 1$. Se observă că $X^{4n+1} - X = X(X^{4n} - 1) = X(X^{2n} - 1) \cdot (X^{2n} + 1)$. *Metoda II.* Se calculează $f(1) = 1^{4n+1} - 1 = 0$, $f(-1) = 0$. **26.** Se notează cu α rădăcina polinomului $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ care verifică $\alpha^5 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ şi $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Aplicând teorema lui Bézout $f(\alpha) =$

$= \alpha^{5a_1} + \alpha^{5a_2+1} + \alpha^{5a_3+3} + \alpha^{5a_4+3} + \alpha^{5a_5+4} = \left(\alpha^5\right)^{a_1} + \left(\alpha^5\right)^{a_2} \cdot \alpha + \left(\alpha^5\right)^{a_3} \cdot \alpha^2 +$ $+ \left(\alpha^5\right)^{a_4} \cdot \alpha^3 + \left(\alpha^5\right)^{a_5} \cdot \alpha^4 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$. **27.** $\left(X^2 + X + 1\right)^{8n+1}$ - $- X = \left[\left(X^2 + 1\right) + X\right]^{8n+1} - X$. Dezvoltând după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$. Dar $X^{8n+1} - X =$ $= X\left(X^{8n} - 1\right) = X\left[\left(X^8\right)^n - 1\right]$ se divide cu $X^8 - 1 = (X^4 + 1)(X^4 - 1) = (X^4 +$ $+ 1)(X^2 + 1)(X^2 - 1)$. **28.** Se folosește teorema lui Bézout:
$f(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+3} + \alpha^{2n+3} = \left(\alpha^2\right)^{n+3} + \alpha^{2n} \cdot \alpha^3 = \alpha^{2n} \cdot \alpha^6 + \alpha^{2n} \cdot \alpha^3 = \alpha^{2n}\alpha^3 \cdot$ $\cdot \left(\alpha^3 + 1\right) = 0$ (α este rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$ deci care verifică relațiile $\alpha^3 = -1$ și $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$). **29.** $f = (X + 1)^3 - \left(\frac{3}{8}X^2 + \frac{9}{8}X - 1\right) + 1$.

30. Fie $f = (X - 1)^m - X^m + 1$. Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 - X + 1$ trebuie ca $f(\alpha) = 0$. Cum $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, atunci $f(\alpha) = \alpha^{2m} - \alpha^m + 1$. Dacă: $m = 6k \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^{12k} - \alpha^{6k} + 1 = 1 \neq 0$, $m = 6k + 1 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 -$ $- \alpha + 1 = 0$, $m = 6k + 2 \Rightarrow f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha + 1 \neq 0$, $m = 6k + 3 \Rightarrow f(\alpha) =$ $= 3 \neq 0$, $m = 6k + 4 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0$, $m = 6k + 5 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 -$ $- \alpha + 1 = 0$. Valorile lui m căutate sunt $m = 6k + 1$ și $m = 6k + 5$, $k \in \mathbf{N}$. **31.** Se procedează la fel ca la problema precedentă. Se găsește $m = 6k + 2$ și $m = 6k + 4$. **33.** Dacă α este rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, rezultă $\alpha^{1993} + \alpha^2 + 1 = 0$, deci $X^2 + X + 1$ divide $X^{1993} + X^2 + 1$. Câtul este X^{1991} - $- X^{1990} + X^{1988} - X^{1987} + \ldots + X^5 - X^4 + X^2 - X + 1$. **36.** Pentru $x = 0$ egalitatea devine: $0 \cdot P(-1) = -26P(0) \Rightarrow P(0) = 0$. Pentru $x = 1$ egalitatea devine: $P(0) = -25P(1) \Rightarrow P(1) = 0$. Pentru $x = 26$ avem $26P(25) = 0$. $P(26) \Rightarrow P(25) = 0$. Rezultă că $P(X) = X(X - 1)(X - 25)Q(X)$. Înlocuind găsim o nouă relație $(X - 2)Q(X - 1) = (X - 25)Q(X)$. Procedând ca mai sus găsim că $Q(X) = (X - 2)(X - 24)R_1(X)$. Continuând calculele se găsește că $R_1(X) = (X - 3)(X - 23)R_2(X)$ rezultă $P(X) = X(X - 1)(X - 2)(X -$ $- 3)\ldots(X - 24)(X - 25)R(X)$. Înlocuind în egalitatea din enunț rezultă că $R(X - 1) = R(X)$ și polinomul fiind de grad n care îndeplinește condițiile $R(0) = R(1) = R(2) = \ldots = R(n) = k$ avem $P(X) = kX(X - 1)(X - 2)\ldots(X - 25)$. **37.** Pentru $x = 0$ egalitatea devine $(-3)f(1) = 0$ deci $f(X)$ se divide cu X - $- 1$. Pentru $x = 3$ vom avea $3f(3) = 0$, deci $f(X)$ se divide cu $X - 3$. Rezultă

că $f(X) = (X-1)(X-3)\cdot Q(X)$ şi înlocuindu-se în relaţia dată $f(X)$ şi $f(X+1)$ se obţine $(X-1)Q(X) = (X-2)Q(X+1)$. Pentru $x = 2$, $Q(2) = 0$ deci $Q(X)$ se divide cu $X - 2$ deci $f(x) = (X-1)(X-2)(X-3)R(X)$ şi înlocuind în egalitatea din enunţ obţinem: $X(X-1)(X-2)(X-3)R(X) = (X-3)X(X-1)(X-2)R(X+1)$ deci $R(X) = R(X+1)$, adică $R(0) = R(1) = R(2) = \ldots = R(n) = k$. Rezultă că polinomul de gradul n, $R(X) = k$. Deci $f(X) = k(X-1)(X-2)(X-3)$. **41.** $P(X) = X$. **42.** Dacă $f(X) = \frac{1}{2}\left[cX^2 + (2b-c)X + 2a\right]$,

$a, b, c \in \mathbf{Z}$, $\Rightarrow f(n) = \frac{1}{2}\left[cn^2 + (2b-c)n + 2a\right] = \frac{1}{2}\left[cn(n-1) + 2(bn+a)\right]$;

$n(n-1)$ se divide la 2, $(\forall) n \in \mathbf{Z}$. Deci $f(n) \in \mathbf{Z}$. Reciproc, fie $f(X) = aX^2 + bX + c$; $a, b, c \in \mathbf{Q}$. Dacă $f(n) \in \mathbf{Z}$ $(\forall)$ $n \in \mathbf{Z}$, atunci şi $f(0) \in \mathbf{Z}$, $f(1) \in \mathbf{Z}$, $f(-1) \in \mathbf{Z}$. Dar $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$. Deci $c \in \mathbf{Z}$, $a + b + c = K_1 \in \mathbf{Z}$, $a - b + c = K_2 \in \mathbf{Z}$. Rezultă că există: $a = \frac{K_1 + K_2 - 2c}{2}$, $b = \frac{K_1 - K_2}{2}$, $c = c$. Între $K_1 + K_2 - 2c$ şi $K_1 - K_2$ relaţia $K_1 + K_2 - 2c = m$; $K_1 - K_2 = 2n - m$; $f(x) = \frac{1}{2}\left[mx^2 + (2n-m)X + 2c\right]$,

unde $m, n, c \in \mathbf{Z}$. **43.** a) c.m.m.d.c $= 2X^2 - 3X + 2$; b) c.m.m.d.c $= X - 2$; c) c.m.m.d.c $= X^2 + 2X + 2$; d) c.m.m.d.c $= X^2 + 2X + 2$; e) c.m.m.d.c $= 2X^2 + 5x + 3$. **44.** Se arată că c.m.m.d.c = 1. **45.** Dacă $f(X)$ este un c.m.m.d.c al polinoamelor $X^n - 1$ şi $X^m - 1$ atunci orice rădăcină a lui $f(X)$ este o rădăcină a lui $X^d - 1$ unde $d = (m, n)$ este un c.m.m.d.c. Invers, aplicând teorema: fie f şi g două polinoame. Dacă d este c.m.m.d.c al lui f şi g, atunci există polinoamele u şi v astfel încât $d = uf + vg$, orice rădăcină a lui $X^d - 1$ este rădăcină a lui $f(X)$. Deci $f(X) = X^d - 1$. **46.** Fie $d = (m, n)$. Procedând ca la exerciţiul precedent se obţine: dacă numerele $\frac{m}{d}$ şi $\frac{n}{d}$ sunt impare, atunci un c.m.m.d.c al polinoamelor date este $X^d + a^d$, dacă cel puţin unul dintre numerele $\frac{m}{d}$ şi $\frac{n}{d}$ este par un c.m.m.d.c al polinoamelor este 1. **47.** a) $X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X-1)(X+1)$; b) $X^6 - 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)(X-1)(X^2 + X + 1)$; c) $X^8 - 1 = (X^4+1)(X^2+1)(X+1)(X-1) = \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\cdot$

$\cdot(X^2+1)(X+1)(X-1)$. **48.** Da. **49.** $f = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

50. a) Folosind formulele lui Viète se obţine: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = -2$; b) $m = -20$, $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = -3$; c) $m = 47$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = -\frac{1}{6}$; d) $m = -228$, $x_1 = -3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 3 - 2\sqrt{5}$, $x_4 = 3 + 2\sqrt{5}$; e) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; f) $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = -\frac{1}{3}$; g) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$; h) $m = 35$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = -4$; i) $m = 24$, $x_1 = -3$, $x_2 = -4$, $x_2 = 2$; j) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 5$, $x_3 = -7$; k) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{3}$ etc.

51. a) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, atunci $x_1^3 + px_1 + q = 0$, $x_2^3 + px_2 + q = 0$, $x_3^3 + px_3 + q = 0$. Se adună aceste relaţii membru cu membru şi se obţine: $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q + pS_1 = -3q - p \cdot 0 = -3q$. Pentru a obţine pe $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, se înmulţesc ecuaţiile de mai sus cu x_1, x_2 respectiv x_3 şi se obţine $S_4 = -pS_2 - qS_1$ (am notat $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ ş.a.m.d.). Se procedează ca la punctul a). **52.** a) desfacem parantezele şi regrupăm termenii dând factor pe m şi se obţine $(x - 2)(x^2 + (2m - 3)x + 3 - m) = 0$; b) Ţinând cont că $|x_2 - x_3| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2}$ şi de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi pentru ecuaţia de gradul doi se obţine: $m_1 = 4$, $m_2 = -\frac{1}{2}$. **53.** a) Ecuaţia se mai poate scrie $a^2(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) - 2ax(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) + (-2x^3 + x^2 + 8x - 4) = 0$; rădăcinile independente de a sunt $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{2}$; b) Rădăcina care depinde de a, $x_4 = \frac{a^2+1}{2a}$; se găseşte $a = 0$. **54.** a) Pentru ca ecuaţia să aibă o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$ trebuie ca $f(-1) \cdot f(1) < 0$ şi $f(-1) \cdot f(1) = -(m + 1)^2$; b) Folosind formulele lui Viète se obţine $m = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; c) Relaţia se mai poate scrie $x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 < 6x_1^2x_2^2x_3^2$; $x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 = (x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)^2 -$

$- 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$. Din relaţiile lui Viète se obţine $m^2 - 4 < 0$; $m \in$ $\in (-2, 2)$. **55.** Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că toate rădăcinile sunt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 +$ $+2\sum_{1 \le i \le j \le 4} x_i x_j \Leftrightarrow (a+1)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right) + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \Rightarrow -a^2 + a - 1 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$, contradicţie, deoarece $-a^2 + a - 1 < 0$ $(\forall)a \in \mathbf{R}$. **56.** La fel ca la exerciţiul de mai sus, se observă că $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = -m^2 - 2$. **57.** Scriem $f(X - 1) = X^3 -$ $- 2X^2 + (a + 1)X - a + b$. Aplicăm teorema lui Bèzout şi $f(-1) = -4 \Rightarrow -2a +$ $+ b = 0$. Din relaţiile lui Viète, la fel ca la exerciţiul 51, se obţine $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3a - 3b$ de unde $a - b = 3$. Se obţine $a = -3$, $b = -6$. **58.** Se procedează ca la exerciţiul de mai sus şi se obţine: $a = -\frac{1117}{14}$, $b = \frac{2241}{14}$. **59.** Scriem $e^{f(x)} \le 1$, $e^{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} \le e^0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \le 0$; $(x^2 - 1)(x - 1)^2 \le 0$; $x \in [-1, 1]$. **61.** Dacă α este o rădăcină dublă, atunci α este rădăcină a lui $f - D(f) = \frac{X^n}{n!}$. Deci $\alpha = 0$. Dar $f(0) = 1$, contradicţie. **63.** Se calculează $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ ca în exerciţiul 47 şi se obţine $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5m$; $5m = 10$; $m = 2$. **64.** Se face transformarea $y = x + 1$ deci $x = y - 1$ şi se înlocuieşte în prima ecuaţie; se obţine $y^3 - y^2(3 - a) +$ $+ y(3 - 2a + b) + a - b + c - 1 = 0$. De unde se găseşte sistemul $a - b - c =$ $= 3$; $3a - b + c = 3$; $2b - c = -1$. Se obţine $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. **65.** Se calculează $f(-1) \cdot f(1)$ şi se arată că $f(-1) \cdot f(1) = -(m^2 - m + 1)(m^2 + m + 5)$. Deci $f(-1) \cdot f(1) < 0$. **66.** Considerăm rădăcinile $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$, $x_4 =$ $= q^3x_1$. Aplicând relaţiile lui Viète se găseşte $q = -2$, $x_1 = -1$; $x_2 = 2$, $x_3 =$ $= 4$, $x_4 = 8$ şi $m = 64$. **67.** a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$ din relaţiile lui Viète; b) $- m^3 - 3m + 3 \ge 3(m + 1)^2 \Rightarrow -m^3 - 3m^2 - 3m \ge 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$; c) Se calculează $f(1)$ şi se găseşte $m = -1$, rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}\,i$, $x_3 = -\sqrt{2}\,i$. **68.** Se aplică relaţiile lui Viète şi se obţine ecuaţia: $S_1^6 + 20S_1^2 - 144 = 0$ (unde $S_1 = x_1 + x_2$). Se rezolvă ecuaţia şi se găsesc soluţiile: 2 şi -2. Rădăcinile ecuaţiei sunt: $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = -1 +$

$+ \sqrt{2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{2}$ sau $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$. **69.** Scriem a) $X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p = (X^2 + 1)(X^2 - 2X) + (n + 2)X + p$ de unde se obţine că $n = -2$ şi $p = 0$. b) $g(1) + g(2) + ... + g(n) = (1 - 2) + (2^2 - 2\cdot2) + (3^2 - 3 \cdot 2) + ... + (n^2 - n \cdot 2) = (1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 2(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.

70. $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = a(1^3 + 2^3 + ... + n^3) + b(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + c(1 + 2 + ... + n) + nd$. Din $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = n^4$ se găseşte $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$. **71.** Se verifică rădăcina $x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$. Se formează relaţiile Viète şi se găseşte că $x_2 + x_3 = -x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ şi $x_2x_3 = \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} + 1$. Se formează ecuaţia de gradul doi şi se constată că $\Delta < 0$. **72. 73.** Se procedează analog ca la exerciţiul 71. **74.** Rădăcina reală este $z = 2$. Scriem $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = (z - 2)[z^2 - (1 + 2i)z + 3(1 + i)] = 0$. **75.** a) Se aplică teorema lui Bézout şi se obţine sistemul de ecuaţii $c = 0$; $1 + a + b = 0$; $1 - a - b = 0$, sistem care nu are soluţii; b) Ecuaţia admite ca rădăcină şi pe $x_2 = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$; se obţine $a = -2$; $b = 1$, $c = -2$. Rădăcinile reale ale ecuaţiei sunt $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. **76.** Aplicând relaţiile lui Viète se obţine $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ şi $m = -7$. **77.** Se aplică relaţiile lui Viète. **78.** $a = 3$. **79.** Se folosesc relaţiile lui Viète şi se găsesc sistemele de soluţii: ($a = 1$, $b = -1$, $c = 1$), ($a = \lambda$, $b = 0$, $c = 0$), $\lambda \in \mathbf{R}$. **80.** Avem următoarea teoremă: orice polinom $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de grad $n \geq 1$ cu coeficienţi reali este un produs de polinoame de gradul I sau II cu coeficienţi reali, adică poate fi scris sub forma: $f = a_n\left(X - \alpha_1\right)^{k_1} \dots \left(X - \alpha_p\right)^{k_p}\left(X^2 + b_1X + c_1\right)^{l_1} \dots \left(X^2 + b_sX + c_s\right)^{l_s}$ unde α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ şi $b_1^2 - 4c_1 < 0, \dots, b_s^2 - 4c_s < 0$. Aplicând această teoremă şi ţinând cont de ipoteză, f se scrie sub forma $f = g^2 \cdot h$ unde h nu are nici o rădăcină reală. Vom împărţi rădăcinile complexe ale lui h în două grupe: rădăcinile complexe conjugate fac parte din grupe distincte. Făcând produsul factorilor liniari care corespund rădăcinilor fiecărei

grupe obţinem polinoamele $h_1 + ih_2$ şi $h_1 - ih_2$ şi $h = (h_1 + ih_2)(h_1 - ih_2) = h_1^2 + h_2^2$. Deci $f = (gh_1)^2 + (gh_2)^2$. **81.** Dacă α este o rădăcină întreagă a lui f avem $f = (X - \alpha)g$. Deci $f(a) = (a - \alpha)g(0)$ şi $f(a + 1) = (a + 1 - \alpha)g(1)$, de unde $a - \alpha \mid f(0)$ şi $a + 1 - \alpha \mid f(1)$, contradicţie. **82.** Conform ipotezei există a_1, a_2, a_3, a_4 numerele întregi distincte astfel încât $f - 1 = (X - a_1)\cdot(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)g$, unde $g \in \mathbf{Z}[X]$. Dar oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$ numărul $(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)(a - a_4)$ nu poate fi egal cu -2. Deci $f(a) - 1 \neq -2$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Pentru ultima afirmaţie din problemă răspunsul este negativ. **83.** Din teorema lui Bézout obţinem $f - 12 = (X - a)\cdot(X - b)(X - c)(X - d)g$, unde $g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $f(k) = 17 \Rightarrow (k - a)(k - b)\cdot(k - c)(k - d)g(k) = 29$. 29 fiind prim $\Rightarrow$ cel puţin 2 factori dintre $k - a$, $k - b$, $k - c$, $k - d$, sunt egali cu +1 sau -1. De exemplu dacă $k - a = k - b - 1 \Rightarrow a = b$, contradicţie. **84.** Se aplică acelaşi procedeu ca în problema 83. **86.** Se desfiinţează parantezele şi se face o nouă grupare de termeni: $(x^2 + 3)(x^2 + mx + 2m) = 0$; b) La fel ca la exerciţiul 84 se obţine $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + m) = 0$. **87.** Se face schimbarea de variabilă $y = \dfrac{-3 - x}{x}$ şi se obţine ecuaţia $y^3 + 18y^2 + 60y + 16 = 0$.

b) Se calculează $y_1 + y_2 + y_3 = -\left[\dfrac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{(x_1x_2x_3)^2}\right] + 3 = -16$;

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\left(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2\right) + 3x_1x_2x_3}{(x_1x_2x_3)^2} = -16;$$

$$y_1y_2y_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^2x_3^2 - x_1^2x_3^2 + (x_1x_2x_3)^2 - 1}{(x_1x_2x_3)^2} = 0;$$ deci ecuaţia este $y^3 + 16y^2 - 16y = 0$. c) Se procedează ca la punctul b) şi se găseşte $y_1 + y_2 + y_3 = 22$; $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 60$; $y_1y_2y_3 = 40$; deci ecuaţia este $y^3 - 22y^2 + 60y - 40 = 0$. d) Se face schimbarea de variabilă $x = -3 - y$ şi se obţine ecuaţia $y^3 + 6y^2 + 4y - 13 = 0$. e) Se face schimbarea de variabilă $x = -\dfrac{1}{y}$ şi se obţine ecuaţia $y^3 + 5y^2 + 3y - 1 = 0$. f) Se face schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1 + 3y}{-y}$ şi se obţine ecuaţia $16y^3 - 4y^2 - 6y - 1 = 0$.

88. a) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{k-1}$ şi se obţine $y^3 - 3(k-1)^2 y + (k-1)^3 = 0$. b) Se aplică relaţiile lui Viète şi se obţine ecuaţia $y^3 - 9y^2 + 18y + 24 = 0$. c) $y_1 = 6 - x_1^2$, $y_2 = 6 - x_2^2$, $y_3 = 6 - x_3^2$; $y_1 + y_2 + y_3 = 12$; $y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3 = 45$; $y_1y_2y_3 = 53$; $\Rightarrow$ ecuaţia: $y^3 - 12y^2 + 45y - 53 = 0$.

90. $E = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2}{x_3^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2^2}{x_2^2} = \frac{2p}{x_1^2} - 1 + \frac{2p}{x_2^2} - 1 + \frac{2p}{x_3^2} - 1 = \frac{2p^3 - 3q^2}{q^2}$. **91.** Deducem $a = \frac{b-4}{3-2b}$ şi înlocuind obţinem $b^3 - 4b^2 + 9b - 11 = 0$. Un polinom de tipul cerut este $X^3 - 4X^2 + 9X - 11$. **92.** Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei, atunci avem: $x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0$; $x_2^4 - 2x_2^3 + 3x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0$; $x_3^4 - 2x_3^3 + 3x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$; $x_4^4 - 2x_4^3 + 3x_4^2 - 4x_4 + 1 = 0$. Se împart egalităţile cu x_1, x_2, x_3 respectiv x_4 şi se adună acestea, membru cu membru, deci: $S_3 - 2S_2 + 3S_1 - 16 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0$; $S_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i + x_4^i$.

Se fac calcule şi se obţine $S_3 = 2$. **93.** a) $x_1 = 3\sqrt{2}$, $x_2 = -3\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = -1$; b) $x_1 = 3\mathrm{i}$, $x_2 = -3\mathrm{i}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$; c) $x_1 = 6\mathrm{i}$, $x_2 = -6\mathrm{i}$, $x_3 = -\frac{1}{5}$, $x_4 = -\frac{4}{5}$. d) $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - 2\mathrm{i}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $m = 23$, $n = 10$; e) $x_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}$, $x_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{1}{2}$; f) $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_5 = 56$; g) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -64$; h) $x_1 = -\mathrm{i}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$; i) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 0$; $n = -1$, $p = 0$; j) $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - 2\mathrm{i}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $a = -37$, $b = 30$; k) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $m = -10$, $n = 1$. **94.** Se aplică teorema lui Bézout, $m = 1$,

$n = p = -2$, $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **96.** a) Se face substituţia $x^2 = y$ şi se obţine $x_1 = \sqrt{2m^2 - 3}$, $x_1 = -\sqrt{2m^2 - 3}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$; c) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2\sqrt{3}$, $x_3 = 2\sqrt{2}$, $x_4 = -2\sqrt{2}$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = 1 + i\sqrt{3}$; e) $x_1 = \sqrt{m+1}$, $x_2 = -\sqrt{m+1}$, $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = -\sqrt{m}$; f) $x_1 = \sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **97.** a) $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{4}$, $x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{4}$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{3 + i\sqrt{55}}{8}$, $x_4 = \frac{3 - i\sqrt{55}}{8}$; c) $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; d) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$; e) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$; f) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}$. **98.** Se notează $x^2 = y$ şi se obţine ecuaţia $y^3 - (m - 1)y^2 + (m - m^2)y + 2m - m^2 = 0$. Această ecuaţie se scrie $(y + 1)(y^2 - my + 2m - m^2) = 0$. Se obţine rădăcina $y = -1$ şi rădăcinile y_2, y_3 ale ecuaţiei $y^2 - my + 2m - m^2 = 0$. **99.** Se împarte cu x^2 şi se notează $x + \frac{m}{x} = y$; se obţine ecuaţia $y^2 + y + 1 - 2m = 0$. **100.** Scriem $(x^2 + 1)(x - 1)^2 - ax^2 = x^4 - 2x^3 + (2 - a)x^2 - 2x + 1 = 0$, ecuaţie reciprocă. **101.** Se împarte cu x^2 şi se notează $x + \frac{c}{x} = y$; se obţine ecuaţia $y^2 + ay + b - 2c = 0$.

102. $(x + z)^n = \left(x + \bar{z}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{x + z}{x + \bar{z}}\right)^n = 1$; $\frac{x + z}{x + \bar{z}} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x + a + bi}{x + a - bi} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow \frac{x + a}{-bi} = \frac{1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+a}{-bi} = \dfrac{2\cos^2\dfrac{k\pi}{n} + 2i\sin\dfrac{k\pi}{n}\cos\dfrac{k\pi}{n}}{2\sin^2\dfrac{k\pi}{n} - 2i\sin\dfrac{k\pi}{n}\cos\dfrac{k\pi}{n}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x+a}{-bi} = \dfrac{2\cos\dfrac{k\pi}{n}}{-2i\sin\dfrac{k\pi}{n}} \quad \Rightarrow$

$\dfrac{x+a}{-b} = 2ctg\dfrac{k\pi}{n}$. **103.** $(1 - X)f = a_0 + (a_1 - a_0)X + (a_2 - a_1)X^2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})X^n - a_nX^{n+1}$. Dacă $|\alpha| > 1 \Rightarrow |f(\alpha)(1 - \alpha)| \geq a_n|\alpha|^{n+1} - |a_0 + (a_1 - a_0) + \ldots + (a_n - a_{n-1})\alpha^n| > a_n|\alpha|^{n+1} - |\alpha|^n (a_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \ldots + a_n - a_{n-1}) = a_n |\alpha|^n (|\alpha| - 1) > 0$. Deci $f(\alpha) > 0$, contradicţie. **104.** Fie $f = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$, $g = \sum_{i\geq 0} b_iX^i$; presupunem că $p \mid a_0$, $p \mid a_1$, ..., $p \mid a_{k-1}$, p nu divide a_k şi $p \mid b_0$, $p \mid b_1$, ..., $p \mid b_{l-1}$, p nu divide b_l. Scriem $fg = \sum_{i\geq 0} c_iX^i$, $c_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j$.

Avem $c_{k+l} = a_0b_{k+l} + a_1b_{k+l-1} + \ldots + a_kb_l + a_{k+1}b_{l-1} + \ldots + a_{k+l}b_0 \Rightarrow p \nmid c_{k+l} \Rightarrow$ $\Rightarrow p$ nu divide fg, contradicţie. **105.** $f = c(f)f'$, $g = c(g)g'$; f', $g' \in \mathbf{Z}[X]$ şi $\Rightarrow c(f') = c(g') = 1$. Folosind problema 104 rezultă $c(f'g') = 1 \Rightarrow c(fg) = c(f)\cdot c(g)$. **106.** Presupunem că $f = gh$, $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_rX^r$, $h = c_0 + c_1X + \ldots + c_sX^s$, $g, h \in \mathbf{Z}[X]$. Avem $a_0 = b_0c_0$, $a_1 = b_1c_0 + b_0c_1$, $a_2 = b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2$, ..., $a_t = b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \ldots + b_0c_t$. Cum $p \mid a_0$ şi $p^2 \nmid a_0$ rezultă $p \mid b_0c_0 \Rightarrow p \mid b_0$ şi p nu divide c_0. Din $p \mid a_1 \Rightarrow p \mid b_1c_0 \Rightarrow p \mid b_1$; $p \mid a_2 \Rightarrow p \mid b_2c_0 \Rightarrow p \mid b_2$. Continuând din $p \mid a_r (r \leq n - 1) \Rightarrow p \mid b_r \Rightarrow$ $\Rightarrow p \mid a_n$, contradicţie. **107.** $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$; $f = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$. Se arată că polinomul $g = f(X + 1) = \dfrac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + C_p^1X^{p-2} + C_p^2X^{p-3} + \ldots + C_p^{p-1}$ este ireductibil, cu criteriul lui Eisenstein ($p \mid C_p^k$; $1 \leq k \leq p - 1$) şi deci rezultă că f este ireductibil. **108.** Se aplică problema 107. **109.** Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru $p = 3$ sau $p = 5$. **110.** Se aplică criteriul lui Eisenstein. **111.** $f = X^{2^n} + 1$. Se arată că polinomul $g = f(X + 1)$ este ireductibil, cu criteriul lui Eisenstein, $g = X^{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} C_{2^n}^k + 2$. Se arată că $2 \mid C_{2^n}^k$, $(\forall) 1 \leq k \leq 2^n - 1$. **112.** Poli-

nomul este un produs dintre un polinom de gradul I şi unul de gradul III $\Leftrightarrow$ polinomul are o rădăcină întreagă $\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ este o rădăcină $\Leftrightarrow a + b + 2 = 0$ sau $a - b + 2 = 0$. Avem $X^4 + aX^2 + bX + 1 = (X^2 + \alpha X + \beta)(X^2 + \alpha' X + \beta')$; $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \beta\beta' = 1$, $\alpha\beta' + \alpha'\beta = b$, $\alpha\alpha' + \beta + \beta' = a$, $\alpha + \alpha' = 0$. Dacă $\beta = \beta' = 1 \Rightarrow b = 0$ şi $a = 2 - k^2$, $k \in \mathbf{Z}$ cu $k \neq \pm 2$. Dacă $\beta = \beta' = -1 \Rightarrow b = 0$ şi $a = -2 - k^2$ cu $k \neq 0$. **113.** Presupunem $f = gh$ cu $g, h \in \mathbf{Z}[X]$. Cum $f(a_i) = -1$, atunci $g(a_i)\, h(a_i) = -1$. Deci $g(a_i) = -1$ şi $h(a_i) = 1$ sau $g(a_i) = 1$ şi $h(a_i) = -1$ de unde $(g + h)(a_i) = 0$ ($i = 1, 2, ..., n$). Cum grad $(g + h) < n$ avem $g + h = 0$. Deci $f = -g^2$, contradicţie deoarece coeficientul de grad maxim al lui f este 1. **114.** Dacă $f = (X - \alpha)g$ cu $\alpha \in \mathbf{Z}$ şi $g \in \mathbf{Z}[X] \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \mid c$. Cum $(a + b)c =$ = impar $\Rightarrow a + b =$ impar şi $c =$ impar $\Rightarrow \alpha =$ impar. Din egalitatea $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha(a\alpha + b)$ par $\Rightarrow a\alpha + b$ par $\Rightarrow a + b =$ par, contradicţie. **116.** Avem $2(a_0 + a_2 + ... + a_{1986}) = f(1) + f(-1) = 3^{1986} + 1$. **117.** Se verifică prin calcul direct. **118.** a) Se determină mai întâi λ_n; apoi din egalitatea $f - \lambda_n f_n = \lambda_0 f_0 + ... + \lambda_{n-1} f_{n-1}$ se determină λ_{n-1} şi în final se determină λ_0; b) rezultă din a). **119.** Se înlocuieşte X cu a_1 şi obţinem α_0, apoi se înlocuieşte X cu a_2 şi se obţine α_1; apoi se înlocuieşte X cu a_3 şi se obţine α_2 ş.a.m.d. **120.** $a \geq 1$. **121.** $a \in (-\infty, -1)$. **123.** Dacă $f(x) = X^{n-1} + ... + X + 1 = (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$, avem: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} = \frac{f'(1)}{f(1)}$.

124. Folosim problema 118 şi vom lua în consideraţie polinoamele $f_k = \frac{X(X-1)(X-2)...(X-k+1)}{k!}$, $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$. Cum $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(n)$ sunt numere întregi se obţin $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{Z}$. Dacă $m > n$ avem $f_k(m) = C_m^k \Rightarrow f(m) \in \mathbf{Z}$. Dacă $0 \leq m \leq n$ avem $f_k(m) = 0$ pentru $k > m$ şi $f_k(m) = C_m^k$ pentru $k \leq m$. Deci $f(m) \in \mathbf{Z}$. Analog în cazul când $m < 0$ obţinem $f_k(m) \in \mathbf{Z}$ şi deci $f(m) \in \mathbf{Z}$.

Capitolul XIV
PERMUTĂRI

2. a) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; b) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; c) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; d) $\sigma^{4k} =$

$= e$, $\sigma^{4k+1} = \sigma$, $\sigma^{4k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4k+3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $x = e$ (permutarea identică). **4**. $\sigma^{123} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma^{210} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{145} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **5**. $\sigma^{100} = e$, $\sigma^{151} = \sigma^{651} = \sigma$; **6**. a) $m(\sigma) = 2$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; b) $m(\sigma) = 4$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; c) $m(\sigma) = 4$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; d) $m(\sigma) = 7$, $\varepsilon(\sigma) = -1$; e) $m(\sigma) = 6$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; f) $m(\sigma) = 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$; g) $m(\sigma) = 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$. **7**. Cum $\varepsilon(x^2) = 1$ şi $\varepsilon(u) = -1$ nu există nici o permutare. **8.** $\varepsilon(x^2) = 1$, $\varepsilon(u) = -1$; nu există nici o permutare. **9**. $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **10.** $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **11.** $i = 5, j = 2$. **12.** $i = 5, j = 6$. **13.** $m(\sigma) = n(n - 1)$ şi σ este întotdeauna pară; **14.** $e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5$. **15.** $4!\,(1 + 2 + 4 + 5 + 6)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 4799952$. **16.** al 112-lea. **17.** Obţinem $\frac{5!}{2!} = 60$ numere distincte, suma lor este $\frac{4!}{2!}(1 + 2 + 4 + 5 + 5)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 2266644$. **18.** Fie $\sigma \in S_n$ pentru care P_σ este maxim. Fie $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ cu $i < j$. Fie transpoziţia $\tau_{ij} = (ij)$ şi permutarea $\tau = \tau \circ \tau_{ij}$. Avem $P_\tau \leq P_\sigma$. Cum $P_\tau = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} \left(a_k^r + \frac{1}{a_{\sigma(k)}^s}\right) \cdot \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s}\right)$ atunci, din $P_\tau \leq P_\sigma$ prin simplificare se obţine

$$\left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s}\right) \leq \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s}\right)$$

de unde obţinem

$$\left(a_i^r - a_j^r\right)\left(a_{\sigma(j)}^s - a_{\sigma(i)}^s\right) \leq 0 \Rightarrow a_{\sigma(j)}^s > a_{\sigma(i)}^s \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j).$$

Cum i şi j au fost arbitrar aleşi, $\sigma = e$ (permutarea identică). **19.** şi **20.** Acelaşi raţionament ca la problema 18. Se arată că: a) σ = permutarea identică;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **21.** a) Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ b) σ = permutarea identică. **22.** Vom dovedi că σ este permutarea identică. Prin absurd $\sigma \neq e \Rightarrow (\exists i)$; $1 \leq i \leq n$, $\sigma(i) = j$ cu $j \neq i$. Notăm $\sigma(j) = k \Rightarrow k \neq j$. Fie $k = i$; presupunem $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow a_i a_j < a_j a_i$, contradicţie. Analog în cazul $j < i$ obţinem o contradicţie. Deci $k \neq i \Rightarrow k \notin \{i, j\}$. Notăm $\sigma(k) = l$. Se observă că $l \neq j$ şi $l \neq k$. Presupunem că $l = i$; dacă $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow i < k \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_i a_j < a_k a_l \Rightarrow a_i a_j < a_k a_i \Rightarrow j < k \Rightarrow a_j a_{\sigma(j)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_j a_k < a_k a_l \Rightarrow j < l \Rightarrow j < i$, contradicţie. Analog dacă $j < i$ ne duce la o contradicţie. Deci $l \neq i$ şi deci $l \notin \{i, j, k\}$. Dacă notăm $m = \sigma(l)$, ca mai sus, se arată că $m \notin \{i, j, k, l\}$. Continuând procedeul obţinem o infinitate de numere $\{i, j, k, l, m, \dots\}$, contradicţie. **23.** Sunt permutările de forma: a) există $1 \leq i, j \leq i + 1$ astfel încât $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i$, $\sigma(j) = j + 2$, $\sigma(j + 1) = j$ şi $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; b) există un $1 \leq i \leq n$ astfel încât $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i + 2$, $\sigma(i + 2) = i$ şi $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; c) există $1 \leq i \leq n$ astfel încât $\sigma(i) = i + 2$, $\sigma(i + 1) = i$, $\sigma(i + 2) = i + 1$ şi $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri. Numărul tuturor permutărilor cu două inversiuni este $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. **24.** Orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziţii (ij), iar $(ij) = (1i)\,(1j)\,(1i)$. **25.** Se aplică acelaşi procedeu ca la problema 18.

Capitolul XV
MATRICE

1. $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 12 & 10 \\ 4 & 16 & 11 \end{pmatrix}$. **2.** $f(A) + f(B) = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$; $f(A + B) = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **3.** $A^n = a^n I_2$, dacă $n = 4k$; $A^n = a^n A$, dacă $n = 4k + 1$; $A^n =$

$= -a^n I_2$ dacă $n = 4k + 2$; $A^n = -a^n A$, dacă $n = 4k + 3$. **4.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$A^n = 0$, dacă $n \geq 3$. **5.** $\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ a^{n-1}c + (n-1)a^{n-2} & a^{n-1}b & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **7.** $A^n = A$, dacă n este impar şi $A^n =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-2x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dacă n este par. **8.** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$.

9. $A^n = (-a)^n \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$. **10.** $A^n =$

$= a^n \begin{pmatrix} 1 & n & n\frac{b}{a} + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}(a^n - 1) & 0 \\ 0 & \frac{b}{b-1}(b^n - 1) \end{pmatrix}$.

12. $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} x\frac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x\frac{1-(2x)^n}{1-2x} \\ 0 & y\frac{1-y^n}{1-y} & 0 \\ x\frac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x\frac{1-(2x)^n}{1-2x} \end{pmatrix}$. **13.** $x = 2$, $y = 3$, sau $x =$ $= 2$, $y = -3$. **14.** $u = 5$, $v = a$, $a \in \mathbb{C}$. **15.** $A^n = (2a)^{n-1}A$, deci $(2a)^{n-1} = 1$, $a = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n-1} + i\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 2$. **16.**

$A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $A = \pm\frac{i\pm 1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $A = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

sau $A = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$;

$A = \pm\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{i\pm 1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

18. Luăm $b = a + r$; $c = a + 2r$; $d = a + 3r$ şi, din ipoteză, rezultă $m - l = 2ar + r^2$, $p - m = 2ar + 3r^2$, $p - q = 2ar + 5r^2$ şi se observă că $2(p - m) = m - l + p - q$. **19.** $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C}\right\}$. **20.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $a = -1$. **22.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Fie L_1, L_2, L_3, L_4 liniile matricei căutate $L_1 = (0, 6, 0)$, sau $L_1 = (1, 1, 0)$; $L_2 = (1, 0, 1)$ sau $L_2 = (0, 12, 0)$ sau $L_2 = (2, 2, 0)$; $L_3 = (0, 0, 1)$ sau $L_3 = (1, 2, 0)$; $L_4 = (0, 1, 1)$ sau $L_4 = (1, 3, 0)$. **24.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avem $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$. Se deduce că $bc = -(a^2 + a + 1)$ şi deci $b \neq 0$ şi $c \neq 0$. Matricea A este de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2+a+1}{b} & -a-1 \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$, $A^{-1} = -(A + I_2)$. **27.** Relaţiile se verifică prin calcul direct. **28.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Dacă $D = [A, B] = AB - BA$ şi punem $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, atunci $\alpha = bc' - b'c$, $\delta = b'c - bc'$ şi deci $\alpha + \delta = 0$.

Cum D verifică egalitatea $D^2 - (\alpha + \delta) + (\alpha\delta - \beta\gamma)I_2 = 0 \Rightarrow D^2 = (\beta\gamma - \alpha\delta) I_2 \Rightarrow [[A, B]^2, C] = [D^2, C] = [(\beta\gamma - \alpha\delta) I_2, C] = (\beta\gamma - \alpha\delta)C - (\beta\gamma - \alpha\delta)C = 0$. **29.** Notăm E_{ij} matricea de ordinul n care are la intersecţia liniei i cu coloana j elementul 1 şi în rest zero. Cum $AE_{ij} = E_{ij}A$, oricare $i, j = 1, 2, ...n$, rezultă uşor că A este o matrice de forma $a \cdot I_n$. **30.** card $M = 2^{(m-1)(n-1)}$. **31.** Avem matricele $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$. Deci este suficient să verificăm egalitatea când A_1, A_2, A_3, A_4 sunt matricele $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. **32.** 3) $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ atunci $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right)$ şi $\text{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ij}\right)$ şi deci $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$; 4) rezultă din 3).

Capitolul XVI
DETERMINANŢI

1. a) minus; b) minus; c) minus; d) plus. **2.** $i = 3, j = 5$. **3.** Nici unul. **4.** Coeficientul lui x^4 este -6, coeficientul lui x^3 este 1. **5.** det A $= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$. **6.** det A $= \sum_{\sigma \in S_5} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{5\sigma(5)}$. Fiecare termen conţine un factor care este egal cu zero, deci det $A = 0$. **7.** a) Adunând toate liniile la linia întâi, se obţin la linia întâi numai elementele zero şi deci determinantul este nul. b) Dăm factor comun pe a după prima coloană şi b după coloana a doua. **8.** a) Cel puţin 2 linii au toate elementele egale cu acelaşi număr şi deci determinantul este egal cu zero; b) de exemplu, determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \neq 0$$ şi are $n^2 - n + 1$ elemente egale. **9.** Determinantul are o linie (coloană) nulă şi deci este nul. **10.** Se obţine ecuaţia $(x - 1)(4x^2 + 4x + 5\alpha - 4\alpha^2) = 0$ care are 3 rădăcini reale. **11.** $-\cos^3 2x$. **12.** Se obţine ecuaţia $x^3 - 4x^2 - 2x + 5 = 0$ care are o rădăcină $x = 1$. **13.** Determinantul din membrul stâng se poate scrie ca suma a doi determinanţi. **14.** Avem $\sqrt{1+\cos x} = 2\cos\frac{x}{2}$, $\sqrt{1+\sin x} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$, $\sqrt{1-\sin x} = -\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$, pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Adunăm la coloana a treia coloana a doua, dăm factor comun pe $2\sqrt{2}$; la coloana a doua adunăm coloana întâi înmulţită cu (-1), rezultă că, coloana a doua este egală cu coloana a treia şi deci determinantul este nul. **15.** $-4(a - b)(b - c)(c - a)$. **16.** Linia $(n - 1)$ - a se scade din linia n - a; linia $(n - 2)$ - a se scade din linia $(n - 1)$ - a; linia întâi se scade din linia a doua. Se dezvoltă după linia întâi. **17.** Se înmulţeşte coloana 2 cu 10, coloana 3 cu 10^2 ş.a.m.d. coloana n cu 10^{n-1} şi se adună toate elementele la coloana 1. **18.** Rădăcinile sunt $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$. **19.** Se scade linia p din linia $p + 1$, linia $p - 1$ din linia p ş.a.m.d., linia 1 din linia 2 şi se dezvoltă după coloana 1; se obţine un determinant de aceaşi formă cu cel iniţial în care p se înlocuieşte cu $p - 1$ (aici se foloseşte identitatea $C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$). **20.** Se adună liniile 2, 3, ..., n la prima linie şi se ţine cont că $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. **21.** Dezvoltând după ultima linie avem relaţia de recurenţă $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$. **22.** Se poate folosi relaţia de recurenţă de la problema precedentă. **24.** $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. **25.** $AB = I_n \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow A, B$ inversabile şi B inversa lui $A \Rightarrow BA = I_n$. **27.** Rezultă imediat din formula Binet-Cauchy. **28.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \end{pmatrix}$ şi $B = {}^tA$ (transpusa), atunci $A{}^tA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, unde $c_{11} = a_1^2 + \dots + a_n^2$, $c_{22} = b_1^2 + \dots + b_n^2$, $c_{12} = c_{21} = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$. Se aplică apoi formula Binet-Cauchy. **29.** Se aplică formula Binet-

Cauchy. **30.** Se pornește de la definiția determinantului $\det B = \sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)} = \sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\sigma)\bar{a}_{1\sigma(1)}\bar{a}_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\bar{a}_{n\sigma(n)} =$

$= \det A = \sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\sigma)\overline{a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det A}$

31. $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB)\det(A - iB) = d\cdot\bar{d} \geq 0$, unde $d = \det(A + iB)$. **32.** I) Se verifică prin calcul; II) $A^k = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$. Din egalitatea I), $A^2 = (a + d)A \Rightarrow A^k = (a + d)^{k-1}A$. Dacă $A \neq 0 \Rightarrow (a + d)^{k-1} = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. Dacă $A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. **34.** Dacă $\bar{A}$ (respectiv $\bar{B}$) este matricea pătratică de tip (m, n) care se obține din A (respectiv B) prin adăugarea a $m - n$ coloane (respectiv linii) care au toate elementele egale cu 0, avem $AB = \overline{AB}$. Atunci $\det(AB) = \det(\overline{AB}) = \det(\bar{A})\det(\bar{B}) = 0$. **35.** Fie $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ și $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Considerăm matricea $B \in M(n, p, \mathbf{R})$, $B = (b_{ij})$ cu $1 \leq i \leq n$ și $1 \leq j \leq p$ unde $b_{ij} = \begin{cases}1 & \text{dacă } e_j \in A_i\\ 0 & \text{dacă } e_j \notin A_i\end{cases}$. Se arată că $A = B^tB$ și se aplică problemele 29 și 34. **36.** $\det N = k$. **37.** $\det A = n(-1)^{n-1}$. **38.** $\det A = 1$. **39.** $\det A = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n - 1)$. **40.** a) Paritatea rezultă din faptul că toți termenii determinantului sunt numerele 1 și -1 și ei eventual se reduc doi câte doi; b) Valoarea maximă este 4, de exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Valoarea minimă este -4.

41. Valoarea maximă pe care o poate lua det A este 2, de exemplu pentru matricea $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **42.** Adunând prima linie la toate celelalte linii obținem o matrice care are pe liniile de rang: 2, 3, ..., n elementele 0, 2, sau -2. **43.** Se aplică problema 40 și cea precedentă. Se găsește că valoarea maximă este 16, iar cea minimă -16.

Capitolul XVII
RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE.

1. a) 3; b) 4; c) 4; d) 4. **2.** a) Pentru $\alpha = -3$ sau $\alpha = 3$ rangul este 3, iar dacă $\alpha \neq -3$ şi $\alpha \neq 3$ rangul este 4; b) 4; c) Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\beta = 1$ rangul este 2, iar în rest rangul este 3; d) Pentru $\beta = 1$ sau $\beta = 5$ şi $\alpha = 0$, rangul este 2, iar în rest rangul este 3. **3.** a) Rangul matricei ori nu se schimbă, ori se schimbă cu o unitate; b) Rangul matricei se schimbă cu cel mult o unitate. c) Rangul matricei se schimbă cu cel mult k. **4.** Dacă $a \neq 0$, $A^* = aA^{-1}$. Dacă $a = 0$, pentru $n > 2$ toţi membrii egalităţilor sunt nuli. **5.** $AA' = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$; $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} A'$. **6.** a) Pentru $\alpha \neq -8$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\frac{1}{\alpha + 8}\begin{pmatrix} 2\alpha + 4 & 6 & 4 - \alpha \\ -6 & 3 & 6 \\ 4 - \alpha & -6 & 2\alpha - 4 \end{pmatrix}$; b) Pentru $\alpha \neq 0$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\frac{1}{8\alpha}\begin{pmatrix} 3\alpha & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; c) Nu; d) Da. Inversa este $\begin{pmatrix} 0 & i & -i & i \\ -i & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & i \\ i & i & -i & 0 \end{pmatrix}$. **7.** a) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i $(1 \leq i \leq n)$, matricea este inversabilă, inversa fiind $\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$; b) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i, matricea este inversabilă, inversa sa fiind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha_{n+1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$ c) Da. Inversa este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

d) Da. Inversa este:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\alpha^{n-1} & (-1)^{n-2}\alpha^{n-2} & (-1)^{n-3}\alpha^{n-3} & (-1)^{n-4}\alpha^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Avem $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = I - A^k = I$. **10.** Avem $I = I^t = (AA^{-1})^t = A^t(A^{-1})^t$. **11.** Nu, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Dacă A este nesingulară, atunci $AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow B = C$. **12.** Coloanele matricei AB sunt combinaţii liniare de coloanele matricei A, iar liniile matricei AB sunt combinaţii liniare de liniile matricei B. În continuare se aplică Kronecker de caracterizare a rangului unei matrici.

13. a) $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = I_n$; b) $\left[\frac{1}{2}(A + I_n)\right]^2 = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n)$. **14.** b) Avem $(I_n - E_n)\left(I_n - \frac{1}{n-1}E_n\right) = I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{1}{n-1}E_n^2 = I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{n}{n-1}E_n = I_n$.

15. a) Rezultă direct din proporţionalitatea oricăror linii ale unei matrice de rang 1. b) A = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_n \end{pmatrix}$. **16.** Fie $A = XY$ ca la

exercițiul precedent, componentele lui X fiind $x_1, x_2, ..., x_n$, iar ale lui Y fiind $y_1, y_2, ...y_n$. Atunci $\alpha = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$. b) $(I_n + A)\left(I_n - \frac{1}{\alpha+1}A\right) = \left(I_n - \frac{1}{\alpha+1}A\right)(I_n + A) = I_n + A - \frac{1}{\alpha+1}A^2 = I_n$. În particular, pentru $A = -E_n$ din problema 13, obținem $A^2 = -nA$, deci $(I - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}E_n$. **17.** $A^{-1}B$ are rangul 1 și după problema 16 rezultă că $(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}B$, unde $\alpha = YA^{-1}X$. Înmulțind cu A^{-1} la dreapta relația de mai înainte, se obține $(I_n + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}$ $A^{-1}B A^{-1}$. Dacă efectuăm calculele în ordinea următoare: $A^{-1}X \to Y A^{-1} \to \alpha = Y(A^{-1}X) \to \frac{1}{\alpha+1} \to \frac{1}{\alpha+1} A^{-1}X \to \frac{1}{\alpha+1} A^{-1}BA^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha+1}A^{-1}X\right)(YA^{-1}) \to (A + B)^{-1}$, sunt necesare $3n^2 + 2n + 1$ înmulțiri și împărțiri. **18.** Dacă a^*_{ji} este elementul matricei A^{-1} de pe locul (j, i), c_i coloana a i-a, iar l_j linia a j-a a matricei A^{-1}, atunci se arată că $\overline{A^{-1}} = A^{-1} - \frac{\alpha}{1+\alpha a^*_{ji}}c_il_j$. **19.** Fie A de ordin n și $e = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\...\\1\end{pmatrix} \in M_{n,1}(C)$. Punem $f = A^{-1} e$ și $g = e^t A^{-1}$. Atunci avem $\overline{A^{-1}} = A^{-1} - \frac{a}{1+as}fg$ cu $1 + as \neq 0$, unde s este suma elementelor matricei A^{-1}. **20.** a) $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -1\\-3 & -1\end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; d) $X = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 7 & 5\\0 & -1 & 0\\0 & -3 & -1\end{pmatrix}$; e) Nu are soluții; f) $X = (1\ 1\ 1)$; g) $X = (-3\ \ 11i\ \ 3+9i\ \ -1+7i)$; h) Rezultă:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -(n-2) & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & & -1 \\ 1 & 1 & 2 & & -1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & 2 & & n-1 \end{pmatrix}$$ şi

folosind faptul că $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (problema 10) determinăm şi inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Se obţine în final $X = I_n - \frac{n-1}{n^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Capitolul XVIII
SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. a) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{91\alpha}{19}$, $x_3 = \frac{-39\alpha}{19}$; b) $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = 3\alpha$, $x_4 = 5\alpha$. **2.** a) Sistemul are soluţii nenule pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$. Dacă $\lambda \neq 0$ şi $\lambda \neq -1$, $x = -\alpha$, $y = z = 0$, $t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. Dacă $\lambda = 0$, $x = \beta$, $y = -(\beta + \gamma)$, $z = 0$, $t = \gamma$; β, γ fiind numere oarecare. Dacă $\lambda = -1$, $x = u$, $y = 0$, $z = -(u + v)$, $t = v$, u, v fiind numere oarecare; b) Pentru $\lambda \neq 1$ şi $\lambda \neq -2$, sistemul are soluţii nenule. Pentru $\lambda = 1$, $x = -(\alpha + \beta)$, $y = \alpha$, $z = \beta$; α, β fiind numere oarecare. Pentru $\lambda = -2$, $x = y = z = \gamma$; γ fiind un număr oarecare; c) Sistemul are soluţii nenule dacă $\lambda = \frac{2}{3}$. În acest caz, $x = 34\alpha$, $y = -18\alpha$, $z = 40\alpha$, $t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. **3.** a) Sistemul este incompatibil; b Sistemul este compatibil, soluţiile

sale sunt: $x = \frac{5\alpha}{8}$, $y = \frac{4-\alpha}{2}$, $z = \frac{8-\alpha}{8}$, unde $\alpha \in$ **R**; c) Sistemul este compatibil nedeterminat: $x_1 = -2\lambda$, $y = \lambda + 1$, $z = \lambda$, λ fiind un număr oarecare; d) Sistemul este compatibil nedeterminat; $x = -\lambda + \frac{\mu}{2} + 1$, $y = \lambda$, $z = 9 - \frac{3}{2}\mu$, $t = \mu$, unde λ şi μ sunt numere oarecare. **4.** Sistemul este compatibil $\Leftrightarrow 2a^2b^2 - 3a^2b + a^2 - b + 2 = 0$. **5.** a) Dacă $\alpha \neq 1$ şi $\beta \neq 0$, sistemul are soluţie unică $x_1 = \frac{2\beta - 1}{\beta(\alpha - 1)}$, $x_2 = \frac{1}{\beta}$, $x_3 = \frac{2\alpha\beta - 4\beta + 1}{\beta(\alpha - 1)}$. Dacă $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, sistemul este compatibil, soluţia fiind $x_1 = 2 - \lambda$, $x_2 = 2$, $x_3 = \lambda$, λ fiind număr arbitrar. Dacă $\alpha = 1$, $\beta \neq \frac{1}{2}$ sistemul este incompatibil. Dacă $\beta = 0$ sistemul este incompatibil; b) Dacă $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 1$ şi $\alpha \neq -2$; sistemul are soluţie unică; $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$, $x_2 = \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{\beta(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$, $x_3 = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$. Dacă $\alpha = \beta = 1$, sistemul este compatibil: $x_1 = 1 - \lambda - \mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$ fiind numere arbitrare. Dacă $\alpha = \beta = -2$, sistemul este compatibil. $x_1 = \gamma$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 + \gamma)$, $x_3 = \gamma$ fiind un număr arbitrar. În rest, sistemul este incompatibil; d) Dacă $\alpha \neq 1$ şi $\alpha \neq -22$, sistemul are soluţia unică: $x_1 = \frac{-7\beta}{\alpha + 22}$, $x_2 = \frac{(\alpha + 8)\beta}{\alpha + 22}$, $x_3 = \frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha + 22}$, $x_4 = \frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha + 22}$. Dacă $\alpha = 1$, sistemul este compatibil, soluţia fiind: $x_1 = \beta - 2u - 3v - 3w$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_4 = w$, unde u, v, w sunt numere arbitrare. Dacă $\alpha = -22$ şi $\beta \neq 0$ sistemul este incompatibil, iar dacă $\alpha = -22$ şi $\beta = 0$ sistemul este compatibil. **6.** În ambele cazuri o condiţie necesară şi suficientă este ca sistemul să fie omogen. **7.** O condiţie necesară şi suficientă este ca suma coeficienţilor combinaţiei liniare date

să fie egală cu 1. **8.** a) rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ = rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$; b) rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ = rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. **9.** Condiţii analoage celor din problema precedentă. **10.** Cel puţin două dintre numerele a, b, c, d, e sunt egale cu -1; dacă nici unul nu este egal cu -1, atunci $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+$ $+\frac{d}{d+1}+\frac{e}{e+1}=1$. **11.** $\alpha = be + cf + ad = 0$. **12.** a) Dacă $m \neq 1$, $m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sistemul are soluţie unică: $x = \frac{(4m-3)(2m-1)}{2(m-1)(m^2+m-1)}$, $y = \frac{4m-3}{2(m^2+m-1)}$, $z = \frac{6m^2-12m+5}{2(m-1)(m^2+m-1)}$; b) $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup$ $\cup [1, +\infty)$. **13.** Avem $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x = 0$. Se observă că ecuaţia $(\lambda I_n - A)x = 0$ are soluţii nenule $\Leftrightarrow$ det $(\lambda I_n - A)x = 0 \Leftrightarrow \lambda$ este rădăcină a polinomului $P(x)$. **14.** a) $\lambda_1 = -ai$, $\lambda_2 = ai$. Vectorii proprii pentru $\lambda_1 = -ai$ sunt de forma $(\alpha, i\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda_2 = ai$ nu are vectori proprii. b) $\lambda_1 =$ $= \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sunt: $(-7\alpha + 6\beta; 5\alpha - 3\beta; -6\alpha + 3\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Pentru $\lambda = 6$, vectorii proprii sunt $(\alpha; \alpha; -3\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$; c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sunt de forma $(0; \alpha; -\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda = 6$ sunt de forma $(3\alpha; 4\alpha; -2\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 0$ sunt de forma $(2\alpha + 3\beta; -\alpha; 0; -\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 2$ sunt de forma $(\alpha; -\alpha; \beta; \alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$; e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =$ $= \lambda_4 = 3$. Vectorii proprii sunt de forma $(\alpha; 0; \beta; -\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq$ $\neq 0$. **15.** $P_A(X) = \det(XI_n - A) = (-1)^n \det(A - XI_n) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Fie

$f(X) = a_0\prod_{i=1}^{k}(X-x_i)$ unde x_1, x_2, ..., x_n sunt rădăcinile polinomului. Rezultă $f(A) = a_0\prod_{i=1}^{k}(A-x_iI_n)$ şi deci $\det(f(A)) = a_0(-1)^{nk}\prod_{j=1}^{n}f(x_j)$ = $= (-1)^k\ a_0^n\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{n}(x_j-\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}f(\lambda_i)$. **16.** a) Avem $P_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n)$, iar $P_{A^{-1}}(X) = (-1)^n\det(A^{-1} - XI_n)$. Dacă λ este o valoare proprie a lui A şi cum A este inversabilă rezultă imediat că $\lambda \neq 0$. Mai mult, se arată că rădăcinile lui $P_{A^{-1}}(X)$ sunt inversele rădăcinilor polinomului $P_A(X)$; b) Fie $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, atunci $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$ şi $P_A(-\lambda) =$ $= (-1)^n\ \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$, oricare ar fi $\lambda \in C$. De aici rezultă $P_A(\lambda)P_A(-\lambda) =$ $= (-1)^n\ \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2-\lambda_i^2)$, oricare ar fi $\lambda \in C$. Dar $A^2 - \lambda^2 I_n = (A - \lambda I_n)(A + \lambda I_n)$ şi deci $P_{A^2}(\lambda^2) = (-1)^n\ P_A(\lambda)P_A(-\lambda)$, oricare ar fi $\lambda \in C$. Aşadar, $P_{A^2}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2-\lambda_i^2)$, oricare ar fi $\lambda \in C$, de unde $P_{A^2}(X) =$ $= \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i^2)$. Deci valorile proprii ale matricei A^2 sunt λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_n^2; c) Analog cu raţionamentul de la punctul precedent. Se foloseşte identitatea $A^k - \lambda^k I_n = \prod_{i=1}^{k}(A-X\varepsilon_i I_n)$, unde ε_1, ε_2, ..., ε_k sunt radăcinile de ordinul k ale unităţii. Rezultă că valorile proprii ale lui A^k sunt λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_n^k; d) Fie $f(X) = a_0X^k + a_1X^{k-1} + ... + a_{k-1}X + a_k$. Se poate aplica exerciţiul 15; rezultă că valorile proprii ale lui $f(A)$ sunt $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ..., $f(\lambda_n)$, unde λ_1, λ_2, ..., λ_n, sunt valorile proprii ale lui A. **17.** c) Fie x vectorul propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ. Se arată uşor că, dacă $f(X) = a_0X^k + a_1X^{k-1} + ... + a_{k-1}X + a_k$, avem $f(A)x = f(\lambda)x$, adică este vector propriu al matricei $f(A)$ care corespunde valorii proprii $f(\lambda)$.

Capitolul XIX
LEGI DE COMPOZIŢIE. GRUPURI

1. Elementul neutru $e = 0$. Elementele $x \neq 1$ sunt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x}{x-1}$. **2.** Elementul neutru $e = -1$. Elementele $x \neq 1$ sunt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x+3}{x-1}$. **3.** a) Nu este comutativă, nu este asociativă, nu are element neutru; b) $a_2 = 3a$; $a_3 = 7a$. În continuare se arată prin inducţie. **4.** a) Este comutativă, asociativă, elementul neutru este zero, 0 este singurul element simetrizabil; b) se arată prin calcul; c) $x = \sqrt{5}$. **5.** Este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru, orice element este simetrizabil. **6.** Se observă că $x \top y = \max\{x, y\}$. $\top$ este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru; 0 este singurul element simetrizabil. **7.** Se arată mai întâi că $x, y \in A \Rightarrow x \circ y \in A$. I) Se arată prin calcul; II) $\frac{x+y}{1+\frac{xz}{a^2}} = \frac{y+z}{1+\frac{yz}{a^2}} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x-y)\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) = 0$. Cum $z \neq 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. **8.** a)

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

b) Nu este comutativă, nu este asociativă (de exemplu $(4 * 2) * 3 \neq 4 * (2 * 3)$; nu are element neutru. **9.** a) $ax = b \Rightarrow$ are soluţia $x = ab$; dacă $ax = ay = b \Rightarrow ab = x$ şi $ab = y \Rightarrow x = y$; b) Fie $a \in A$ şi $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Funcţia $\sigma_a : A \to A$, $\sigma_a(x) = ax$ este bijectivă şi $\sigma_a(a) = a$. În plus, dacă $\sigma_a(y) = x$. Din ipoteză rezultă că $x \neq a \Rightarrow \sigma_a(x) \neq x$. Mulţimea $A - \{a\}$ se împarte în perechi disjuncte $\Rightarrow A - \{a\}$ are un număr par de elemente $\Rightarrow A$ are un număr impar de elemente. **10.** „*“ este comutativă şi asociativă $\Leftrightarrow a = b = 0$ şi $c \in \mathbf{R}$ sau $a = b = 1$ şi $c \in \mathbf{R}$. **11.** a) $x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow axz + cz + a^2x + ac + bz = bxz + cx + ax + b^2z + bc \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b, b + c = b^2, c + a = a^2. ac = bc \Leftrightarrow a = b = \lambda, c = \lambda^2 - \lambda$, cu $\lambda \in$

$\in$ **R**; b) Dacă $e \in$ **R** este element neutru $\Rightarrow xe + ax + be + c = x$, $(\forall)x \in$ $\in$ **R** şi $ex + ae + bx + c = x \Rightarrow a = 1 - e$, $b = 1 - e$ şi $c = e(e - 1)$. Dacă notăm $\lambda = 1 - e \Rightarrow a = b = \lambda$ şi $c = \lambda^2 - \lambda \Rightarrow$ legea este asociativă. Invers dacă legea este asociativă, din a) rezultă că elementul neutru $e = 1 - \lambda$; c) Dacă $e \in$ **R** este element neutru, atunci $e - 1$ nu este simetrizabil. **12.** $\top$ şi $\perp$ sunt comutative, asociative şi au element neutru (0, respectiv 1). Pentru a arăta ultimele 2 egalităţi se scrie: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$, $c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$, unde $p_i (1 \le i \le r)$ sunt numere prime şi $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i \ge 0$, $\gamma_i \ge 0$. În continuare se ţine cont că $m \perp n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ şi $m \top n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(m_i n_i)}$. **13.** $\top$ şi $\perp$ sunt comutative şi asociative, nu au element neutru. **14.** a) Legea $*$ este comutativă şi asociativă, 0 este element neutru; fiecare x $\in$ **R** are simetricul $-x$. Legea $\circ$ este comutativă, asociativă -1 este element neutru, orice element este simetrizabil (simetricul lui x este $x' = -x - 2$); b) Soluţiile sistemului sunt (0, -1), (-1, 0). **16.** Sunt n^{n^2} legi de compoziţie dintre care $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sunt comutative şi $n^{(n-1)^2+1}$ au element neutru. **17.** În ($\mathbf{C}^*$, $\top$) elementul neutru este -i, dacă $z \in \mathbf{C}^* \Rightarrow -\frac{1}{z}$ este inversul lui z. **18.** Se arată că $x \ne 1$ şi $y \ne 1 \Rightarrow x * y \ne$ $\ne 1$. Se arată prin calcul că $*$ este asociativă, comutativă. Elementul neutru este -1. Dacă $x \in R_1$, $x' = \frac{2+x}{x-1}$ este inversul lui x (Se vede că $x' \in R_1$). **19.** Operaţia „$\circ$“ este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $z \in C_1 \Rightarrow z' = \frac{z}{1-z}$ este inversul său. Se vede că $z' \in C_1$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i = 5 - 4i$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i = -(7 + 8i)$. **20.** Legea $\perp$ este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru. Dacă x $\in$ A $\Rightarrow$ x' = $= e^{\frac{1}{\ln x}}$ este inversul lui x. Se observă că $x' \in A$. **21.** Legea $\circ$ este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru. Dacă $x \in R_1 \Rightarrow x' =$ $= \frac{x}{1-x}$ este inversul lui x. Se vede că $x' \in R_1$. **22.** Legea $*$ este comutativă, asociativă, 1 este elementul neutru. Dacă $x \in R_2 \Rightarrow x' =$

$= \dfrac{3-2x}{2-x}$ este inversul lui x. Se verifică că $x' \in R_2$. **23.** Legea $\circ$ este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru. Dacă $x \in Q_2 \Rightarrow x' = \dfrac{2x}{x-2}$ este inversul lui x. Se verifică: $x' \in Q_2$. **25.** Fie $x, y \in H \Rightarrow x = a + b\sqrt{2}$, $y = d + c\sqrt{2}$. Dacă H este parte stabilă atunci $xy \in H$. Cum $xy = (ad + 2bc) + (ac + bd)\sqrt{2} \Rightarrow (ad + 2bc)^2 - k(ac + bd)^2 = 1$. Cum $a^2 - kb^2 = 1$ şi $c^2 - kd^2 = 1 \Rightarrow k = 2$. **27.** Elementul neutru este matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversul elementului $\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -2y & x-4y \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} x-4y & -2y \\ 2y & x+4y \end{pmatrix}$

28. Se verifică prin calcul că produsul a 2 elemente din G se găseşte în G. operaţia din G este asociativă deoarece înmulţirea matricelor este asociativă. Fiecare element din G este inversabil. **29.** Considerăm grupul G din exerciţiul 28. Dacă $A \in G$, se arată prin calcul: A^2 este matricea unitate $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau matricea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(\forall)$ $A \in G$. Deci, dacă $A, B \in G \Rightarrow A^2B^2 = B^2A^2$. Deci există grupuri necomutative având proprietatea $x^2y^2 = y^2x^2$. **30.** Din $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow ab = ba^{-1} \Rightarrow a^2b^2 = aba^{-1}b$. Ţinând cont că $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow a^{-1}b = b^{-1}a^{-1} \Rightarrow a^2b^2 = abb^{-1}a^{-1} = e$. Din $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow ba = ab^{-1} \Rightarrow b^2a^2 = bab^{-1}a$. Cum $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = a^{-1}b^{-1}$ şi deci $b^2a^2 = ba, a^{-1}b^{-1} = e$. Cum $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow b = a^{-1}b^{-1}a = b^{-1}ab\,b^{-1}a = b^{-1}a^2 \Rightarrow b^2 = a^2$. Din $a^2b^2 = e$ şi $a^2 = b^2 \Rightarrow a^4 = b^4 = e$. **31.** $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = a(ab)a \Rightarrow$ $\Rightarrow ba = ab$. Există grupuri necomutative cu proprietatea $(a * b)^3 = a^3 * b^3$ (a se vedea problema 39, cap. XX). **32.** a) Operaţiile $\top$ şi $\perp$ sunt comutative, asociative, au element neutru: (0, 1) este element neutru pentru prima, şi (1, 0) pentru a doua; b) Elementele simetrizabile faţă de legea „$\top$" sunt de forma (a, b) cu $a \in \mathbf{Z}$ şi $b \in \mathbf{Q} - \{0\}$; elementele simetrizabile faţă de legea $\perp$ sunt de forma (a, b) cu $a \in \{-1, 1\}$ şi $b \in \mathbf{Q}$; c) Legea $\perp$ nu este distributivă faţă de $\top$. **33.** Legea $*$ este comutativă, asociativă dar nu are element neutru. **36.** Funcţia $f : \mathbf{Z} \to M$, $f(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un izomorfism. **37.** Avem $S_3 = \{e, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_1, \sigma_2\}$ unde e este permutarea identică; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ sunt transpoziţiile: (12),

(13), (23), iar $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Definim funcţia:

$f: S_3 \to G$ în felul următor: $f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\tau_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$f(\tau_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\tau_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$f(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se arată că f este un izomorfism de grupuri. **38.** a) Se arată că $A^{5k} = I_5$, $A^{5k+1} = A$, $A^{5k+2} = A^2$, $A^{5k+3} = A^3$, $A^{5k+4} = A^4$ $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$; b) Inversa lui A este A^4; c) Se defineşte $f : G \to H$; $f(A^k) = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $(\forall)k$, $1 \leq k \leq 5$; f este un izomorfism de grupuri. **39.** În grupul $(\mathbf{R}, *)$, 0 este element neutru, inversul lui x faţă de operaţia $*$ este $-x$. **40.** Definim $f: G_1 \to G_2$ astfel: $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i$,

$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$, $f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i$ este un izomorfism de grupuri. Definim

$g : G_2 \to G_3$, astfel; $g(1)$ = permutarea identică, $g(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$g(i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; g este un izomorfism de grupuri. **44.** Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{Q}, +)$. Dacă notăm $f(1) = a \in \mathbf{Q}$, atunci rezultă că $f(n) = na$, $(\forall)n \in \mathbf{Z}$. Deci $\mathbf{Q} = \{na \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Cum $f(1) \neq 0 \Rightarrow a = \frac{p}{q}$ cu $p \neq 0$ şi $(p, q) = 1$. Putem presupune $q > 0$. Atunci $\frac{1}{q+1} = ma = m\frac{p}{q} \Rightarrow q = (q + 1)mp \Rightarrow q + 1 \mid q$, contradicţie. **45.** Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{R}, +)$.

Fie $\sqrt{2}$, $1 \in \mathbf{R}$. Există $a, b \in \mathbf{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} = f(a)$ şi $1 = f(b)$. Cum $a \neq 0$ şi $b \neq 0$ există $m, n \in \mathbf{Z}$, nenule astfel încât $ma = nb$. Atunci $f(ma) = f(nb) \Rightarrow mf(a) = nf(b) \Rightarrow m\sqrt{2} = n \cdot 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{m} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **46.** Presupunem că există un izomorfism $f : \mathbf{Q}^* \to \mathbf{R}^*$. Fie $f(2) = a$, $a \neq 0$. Există $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ cu $b^3 = a$. Cum f este surjectivă, există $x \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $b = f(x) \Rightarrow b^3 = f(x^3) \Rightarrow f(x^3) = f(2) \Rightarrow x^3 = 2$. Deci $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **47.** Dacă G este grup, ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţiile $x = a^{-1}b$, respectiv $y = ba^{-1}$. Invers, cum ecuaţiile $ax = a$ şi $xa = a$ au soluţii $\Rightarrow$ există element neutru e. Ecuaţiile $ax = e$ şi $ya = e$ având soluţii $\Rightarrow$ există invers pentru orice $a \in G$. **49.** şi **50.** Se verifică prin calcul. **51.** b) Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un izomorfism de grupuri. Notăm $f(1) = n_0$. Se arată că $f = \varphi_{n_0}$. c) Cele două izomorfisme sunt: $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x$ $(\forall)x \in \mathbf{Z}$ şi $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $g(x) = -x$, $(\forall)x \in \mathbf{Z}$. **52.** Dacă $f : \mathbf{Z} \to G$ este un omomorfism şi punem $f(1) = g$, atunci $f(n) = ng = \underbrace{g + g + g ... + g}_{n \text{ ori}}$. Deci f este perfect determinat de valoarea $f(1)$. Rezultă de aici că φ este o bijecţie. **53.** a) Se verifică prin calcul; b) Fie $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ un omomorfism de grupuri. Notăm $q = f(1)$. Dacă $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(n) = nq$. Dacă $x = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow m = nx \Rightarrow f(m) = f(nx) \Rightarrow nq = nf(x) \Rightarrow f(n) = \frac{m}{n}q \Rightarrow f(n) = xq \Rightarrow f = \psi_q$. **54.** Fie $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de grupuri, nenul. Există $x \in \mathbf{Q}$ astfel încât $f(x) = a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. Fie $n \geq 0$ un număr natural; există $y \in \mathbf{Q}$ astfel încât $ny = x \Rightarrow f(ny) = f(x) \Rightarrow nf(y) = f(x) = a \Rightarrow n \mid a$. Cum n este arbitrar $\Rightarrow a = 0$, contradicţie. **55.** Fie $f : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}$ un omomorfism şi $x = \hat{k} \in \mathbf{Z}_n$. Cum $nx = \widehat{nk} = \hat{0} \Rightarrow f(nx) = f\left(\hat{0}\right) = 0 \Rightarrow nf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$. **56.** a) $mf\left(\hat{1}\right) = f\left(m\hat{1}\right) = f\left(\hat{m}\right) = f\left(\hat{0}\right) = \bar{0}$; b) Fie $f, g \in A$ astfel încât $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow f\left(\hat{1}\right) = g\left(\hat{1}\right)$. Dacă $x = \hat{a} \in \mathbf{Z}_m$ este un element oarecare cu $0 \leq a \leq m - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a \cdot \hat{1} \Rightarrow f(x) = f(a \cdot \hat{1}) = a f\left(\hat{1}\right) = a g\left(\hat{1}\right) = g(a \cdot \hat{1}) = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f = g \Rightarrow \varphi$ injectivă. Fie $y = \bar{a} \in B \Rightarrow m\bar{a} = \bar{0}$. Dacă $x = \hat{n} \in \mathbf{Z}_m$, atunci definim $f: \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$, $f(x) = n\bar{a}$. f este un omomorfism de grupuri şi $\varphi(f) = f\left(\hat{1}\right) = \bar{a} \Rightarrow \varphi$ este surjectivă; c) card A = card B. **57.** Ordinul lui A_n este $\frac{n!}{2}$. **58.** Fie $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi $x \in H \Rightarrow H = (xx_1, xx_2, ..., xx_n) \Rightarrow x = xx_k \Rightarrow x_k = e$ (elementul neutru) $\Rightarrow e \in H \Rightarrow$ există un x_l cu $xx_l = e \Rightarrow x^{-1} = x_1 \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow H$ subgrup. **59.** Se verifică prin calcul. **60.** Dacă $H \not\subset k$ şi $K \not\subset H \Rightarrow (\exists)\ x \in H$, $x \notin K$ şi $(\exists)\ y \in K$, $y \notin H$, dar cum $x, y \in H \cup K \Rightarrow xy \in H \cup K \Rightarrow xy \in H$ sau $xy \in K$. În primul caz obţinem că $y = x^{-1}(xy) \in H$, contradicţie. În al doilea caz $x = (xy)y^{-1} \in K$, contradicţie. **61.** Se verifică prin calcul. **62.** Dacă $xy = z \in Z(G) \Rightarrow y = x^{-1}z \Rightarrow$ $\Rightarrow yx = (x^{-1}z) \Rightarrow yx = (x^{-1}z)x = x^{-1}(zx) = x^{-1}(xz) = (x^{-1}x)z = z \Rightarrow yx = xy$. **63.** A se vedea problema 28 cap. III. **64.** Fie $\sigma \in \mathbf{Z}(A_n)$ şi presupunem că $\sigma \neq e \Rightarrow$ există $a \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $\sigma(a) = b$ cu $b \neq a$. Cum $n \geq 4$, există c, d astfel încât a, b, c, d sunt distincte. Definim permutarea θ astfel: $\theta(a) = a$, $\theta(b) = c$, $\theta(c) = d$, $\theta(d) = b$ şi $\theta(x) = x$, $(\forall)x \notin \{a, b, c, d\}$. Este clar că $\theta \circ \theta \in A_n$ şi deci $\sigma \circ (\theta \circ \theta) = (\theta \circ \theta) \circ \sigma \Rightarrow \sigma(\theta(\theta(a))) =$ $= \theta(\theta(\sigma(a))) \Rightarrow d = b$, contradicţie. Deci $Z(A_n) = \{e\}$. **65.** b) Fie $H \subset (\mathbf{Z}, +)$ un subgrup. Dacă $H = \{0\} \Rightarrow H = 0 \cdot \mathbf{Z}$. Dacă $H \neq \{0\} \Rightarrow (\exists)a \in H$, $a \neq$ $\neq 0$. Dacă $a < 0 \Rightarrow -a \in H$ şi $-a > 0$. Deci putem presupune că H conţine un număr strict pozitiv. Fie n_0 cel mai mic număr strict pozitiv care aparţine lui H. Avem clar că $n_0 \cdot \mathbf{Z} \subset H$. Fie $x \in H \Rightarrow (\exists)q, r \in \mathbf{Z}$ cu $x =$ $= n_0q + r$, unde $0 \leq r < n_0$. Avem $r = x - n_0q \in H$. Dacă $r \neq 0$, contrazicem alegerea lui n_0. Deci $r = 0 \Rightarrow x = n_0q \Rightarrow H \subset n_0\mathbf{Z} \Rightarrow H =$ $= n_0\mathbf{Z}$. **66.** Se arată prin calcul direct, ţinându-se cont de definiţia c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. a două numere. **67.** I) Fie $x \in aH \cap bH \Rightarrow x =$ $= ah$, $h \in H$ şi $x = bh'$ cu $h' \in H \Rightarrow ah = bh' \Rightarrow b^{-1}a = h'h^{-1} = h_1 \in H$. Fie $z \in aH \Rightarrow z = ak$, $k \in H$. Cum $b^{-1}a = h_1 \Rightarrow a = bh_1 \Rightarrow z = ak = b(h_1k) \Rightarrow z \in$ $\in bH \Rightarrow aH \subset bH$. Analog se arată că $bH \subset aH$; II) Se arată că funcţia $\varphi : H \to aH$, $\varphi(h) = ah$, este o bijecţie. **68.** Din mulţimea de submulţimi

de forma $\{aH\}_{a \in G}$ alegem pe cele distincte. Fie acestea a_1H, a_2H, ..., a_rH. avem clar că $G = \bigcup_{i=1}^{r} a_iH$ şi $a_iH \cap a_jH = \varnothing$ pentru $i \neq j$. Deci ord $G =$ $=$ card $G = \sum_{i=1}^{r}$ card a_iH $= r \cdot$ card $H = r \cdot$ ord $H \Rightarrow$ ord $H \mid$ ord G. **69.** I) Fie mulţimea $\{e, a, a^2, ..., a^n, ... \}$. Cum G este finit, există k, j cu $k < j$ astfel încât $a^k = a^j$. Rezultă că $a^{j-k} = e$; II) Fie ord$(a) = n$; scriem $m =$ $= nq + r$ cu $0 \leq r \leq n$. Deci $e = a^m = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = a^r \Rightarrow a^r = e$, ceea ce contrazice alegerea lui n; III) Se arată prin calcul direct; IV) Se aplică teorema lui Lagrange. **70.** ord $\hat{25} = 24$; ord $\hat{30} = 4$, ord $\hat{45} = 24$, ord $\hat{45} =$ $= 8$, ord $\hat{80} = 3$. **71.** a) $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow xy = y^{-1}x^{-1}$. Cum $x^2 = e \Rightarrow$ $\Rightarrow x = x^{-1}$ şi deci $xy = yx$; b) Există grupuri necomutative cu proprietatea din enunţ (a se vedea problema 38, cap. XX). **72.** Notăm $A = \{x \in G \mid x^2 =$ $= e\}$ şi $B = \{x \in G \mid x^2 \neq e\}$. Avem $G = A \cup B$ şi $A \cap B = \varnothing$. Dacă $B =$ $= \varnothing \Rightarrow G = A \Rightarrow A$ conţine cel puţin 2 elemente $\Rightarrow$ există $x \neq x^{-1}$. Deci B conţine cel puţin 2 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}\} \Rightarrow$ există $y \in B$ cu $y \notin$ $\notin \{x, x^{-1}\}$. Se arată uşor că $y^{-1} \notin \{x, x^{-1}\}$ şi $y \neq y^{-1}$. Deci B conţine 4 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ se continuă procedeul. După un număr finit de paşi obţinem că B conţine un număr par de elemente. Deci A are un număr par de elemente şi deci există $x \in G$ cu $x \neq e$ şi $x^2 = e$. **73.** Dacă $x \in G$ şi $x^2 \neq e \Rightarrow (x^{-1})^2 \neq e$ şi deci în produsul $\prod_{x \in G} x$ se simplifică 2 câte 2, elementele $x \in G$ pentru care $x^2 \neq e$. Deci $\prod_{x \in G} x = \prod_{\substack{y \in G \\ y^2 = G}} y$. **74.** Considerăm grupul $G = \mathbf{Z}_n - \{0\}$ cu operaţia de înmulţire. În acest grup singurul element de ordinul 2 este $-\hat{1}$. Deci $\prod_{x \in G} x = -\hat{1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot ..... \cdot \widehat{p-1} = -\hat{1} \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. **75.** Se consideră grupul $G = \mathbf{Z}_p - \{0\}$ cu operaţia de înmulţire. **76.** Clar $(ab)^{mn} = e$. Presupunem $(\exists)$ k, $0 < k < mn$, cu $(ab)^k = e \Rightarrow a^kb^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow (a^k)^n =$ $= (b^n)^{-k} = (b^{-n})^k = e \Rightarrow a^{kn} = e \Rightarrow m \mid kn \Rightarrow m \mid k$ (deoarece $(m, n) = 1$). Analog se arată că $n \mid k$. Deci $mn \mid k \Rightarrow mn \leq k$, contradicţie. **77.** Prin calcul se arată că $(\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n, +)$ este un grup comutativ. Fie $\varphi : \mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$,

$\varphi(\dot{x}) = \left(\bar{x}, \hat{x}\right)$ (am notat cu x, clasa lui x în $\mathbf{Z}_{mn}$. Se arată că φ este un omomorfism de grupuri. Dacă $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y}) \Rightarrow \left(\bar{x}, \hat{x}\right) = \left(\bar{y}, \hat{y}\right) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ şi $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow$ m $| x - y$ şi $n | x - y$. Deci $mn | x - y$ adică $\dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \varphi$ este injectivă. Cum $\mathbf{Z}_{mn}$ şi $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, au acelaşi număr de elemente, φ este şi surjectiv. Deci φ este un izomorfism. **78.** Fie $a \in G$, $a \neq e$. Din teorema lui Lagrange obţinem că ord(a) | ord $G \Rightarrow$ ord(a) | $p \Rightarrow p =$ ord (a) $\Rightarrow G =$ $= \{e, a, a^2, ... , a^{p-1}\}$. Definim $\varphi : \mathbf{Z}_p \rightarrow G$, $\varphi\left(\hat{k}\right) = a^k$ unde $0 \leq k \leq p - 1$. Se arată că φ este un izomorfism. **79.** Dacă $n =$ ord(xy) $\Rightarrow (xy)^n = e \Rightarrow$ $\Rightarrow e = \underbrace{xy \cdot xy \cdot ...... xy}_{\text{n ori}} \Rightarrow e = x(yx)^{n-1}y \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} \Rightarrow (yx)^n =$ $= e \Rightarrow$ ord(yx) $\leq n$. Invers, se arată că dacă $m =$ ord(xy), atunci ord(xy) $\leq m$. Deci ord(xy) = ord(yx). **80.** I) Se verifică prin calcul. II) Fie $a \in G$. Dacă ord(a) = 4 $\Rightarrow \langle a \rangle = G \Rightarrow G = \{e, a, a^2, a^3\}$. Se vede uşor că G este izomorf în acest caz cu $(Z_4, +)$. Presupunem că $(\forall)a \in G$, ord(a) < 4. Cum ord(a) | 4, atunci ord(a) ≤ 2. Dacă $G = \{e, a, b, c\}$ deci $a^2 = b^2 = c^2 = e$. De aici rezultă uşor că $ab = ba = c$, $ac = ca = b$, $bc = cb = a$ şi deci în acest caz G este izomorf cu grupul lui Klein.

Capitolul XX
INELE ŞI CORPURI

1. Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului. Elementul unitate este (1, 0). **2.** Fie $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... p_r^{k_r}$, descompunerea în factori primi a lui n, astfel încât $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq r)$ şi $(p_i, p_j) = 1$, pentru $i \neq j$. Avem că $\hat{x} \in N \Leftrightarrow p_i | x$, oricare ar fi i, $1 \leq i \leq r$. Fie acum, $\hat{x}^k = 0$ şi $\hat{x}^m = \hat{x}$. Atunci $\hat{x}^{m^i} = \hat{x}$, pentru oricare $i \geq 1$. Dacă luăm $m^l \geq k$, atunci $\hat{x}^{m^l} = \hat{0}$ şi deci $\hat{x} = \hat{0}$. **3.** M este elementul unitate. Dacă M este formată dintr-un element, $(P(M), +, \cdot)$ este un corp cu două elemente. Dacă $M = \{a, b\}$ are două elemente, atunci inelul $P(M)$ este $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, M\}$, unde 0 =

$= \varnothing$ şi $1 = M$. Operaţiile sunt definite prin tabele:

$+$	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1
0	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1
$\{a\}$	$\{a\}$	0	1	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	1	0	$\{a\}$
1	1	$\{b\}$	$\{a\}$	0

$\cdot$	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1
0	0	0	0	0
$\{a\}$	0	$\{a\}$	0	$\{a\}$
$\{b\}$	0	0	$\{b\}$	$\{b\}$
1	0	$\{a\}$	$\{b\}$	1

Dacă M are 3 elemente, inelul $P(M)$ are 8 elemente. Tabelele adunării şi înmulţirii se fac analog celor precedente. **4.** Dacă $b \in M$, atunci $f(b)a = (ab + b_0 - 1)a = (ab)a + b_0a - a = 1$: deci $f(b) \in M$. Dacă $f(b) = f(b')$, atunci $ab + b_0 - 1 = ab' + b_0 - 1$, de unde $ab = ab'$. Înmulţind această inegalitate la stânga, cu a' obţinem $b = b'$ şi deci f este injectivă. Funcţia f nu este surjectivă, căci de exemplu $b_0 \notin f(M)$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $b_0 = f(b)$, $b \in M$; atunci $ab + b_0 - 1 = b_0$, adică $ab = 1$, contradicţie. **5.** Fie un element $a \in A$, $a \neq 0$ şi $b \in A$ cu $ba = 1$. Avem că $b \neq 0$ şi fie $b' \in A$ cu $b'b = 1$. Atunci $(b'b)a = a$, adică $b' = a$. Deci $ab = ba = 1$, adică a este inversabil. **6.** Fie $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n)\ f\left(\frac{1}{n}\right)$. La fel $g(1) = g(n) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$. Cum $f(1) = g(1)$ şi $f(n) = g(n)$ obţinem $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$. De aici rezultă că $f\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n}\right)$, $(\forall)\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$. **7.** Dacă $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ este inversabil, există $\hat{b} \in \mathbf{Z}$ cu $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Deci $ab \equiv 1 \pmod{n}$, adică există $k \in \mathbf{Z}$ cu $ab - 1 = kn$, sau $ab + (-k)n = 1$. Această relaţie spune că $(a, n) = 1$. Reciproc, este clar deoarece toate implicaţiile de mai sus sunt echivalenţe. **8.** Elementul neutru al legii $\perp$ este 0. Dacă $y \in A$ este inversul lui $1 - x$ în inelul A, atunci $1 - y$ este simetricul lui x faţă de legea $\perp$. **9.** Dacă se consideră $A = M_2(\mathbf{C})$ şi matricele $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $(x * y) * z \neq x * (y * z)$. Deci, în general, legea $*$ nu este asociativă. **12.** a) Se verifică uşor axiomele inelului; b) Se verifică uşor axiomele inelului; c) Aplicaţiile $\varphi : \mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to I$ definită prin $\varphi(m + n\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$ este un izomorfism de inele; d) Fie $d \neq d'$ şi să presupunem că ar exista un izomor-

fism de inele $f : \mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to \mathbf{Z}\left[\sqrt{d'}\right]$. Se arată mai întâi că din $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, rezultă $f(a) = a$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Apoi, dacă $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right]$, atunci $f(x) = a + bf(\sqrt{d})$. Fie $f(\sqrt{d}) = m + n\sqrt{d'}$ şi deci $d = f(d) = f(\sqrt{d} \cdot \sqrt{d}) = (m + n\sqrt{d'})^2 = m^2 + d'n^2 + 2mn\sqrt{d'}$. De aici, se obţine $d = m^2 + d'n^2$ şi $2mn = 0$, relaţii care conduc la o contradicţie. **13.** Fie x, y elemente oarecare dintr-un inel boolean. Considerând $(x + y)(x + y) = x + y$ şi $(x - y)(x - y) = x - y$, rezultă $y = -y$ şi $xy = yx$. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementul $u = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j + \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k + \ldots\ldots\ldots + x_1 x_2 \ldots x_n$, are proprietatea că $x_i = ux_i$, $1 \le i \le n$. **14.** Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului. Elementul neutru la adunare este $0 = (0, 0)$, iar elementul unitate este $1 = (1, 1)$. Are divizorii lui zero, de exemplu $(1, 0)(0, 1) = (0, 0) = 0$. Avem că $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ sunt inversabile. **15.** a) Dacă $\overset{=}{x} = \overset{=}{y}$, atunci $mn \mid (x - y)$ şi cum $(m, n) = 1$, rezultă $m \mid (x - y)$ şi $n \mid (x - y)$, deci $\hat{x} = \hat{y}$ şi $\bar{x} = \bar{y}$; b) Conform pct. a), φ este bine definită. Din definiţie rezultă că φ este omomorfism de inele. Să arătăm că φ este injectiv. Dacă $\varphi\left(\overset{=}{x}_1\right) = \varphi\left(\overset{=}{x}_2\right)$, atunci $\left(\hat{x}_1, \bar{x}_1\right) = \left(\hat{x}_2, \bar{x}_2\right)$, de unde $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ şi $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, sau $m \mid (x_1 - x_2)$ şi $n \mid (x_1 - x_2)$. Cum $(m, n) = 1$, avem că $mn \mid (x_1 - x_2)$ şi deci $\overset{=}{x}_1 = \overset{=}{x}_2$. Mai mult, cum $\mathbf{Z}_{mn}$ şi $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ au acelaşi număr de elemente, rezultă că φ este şi surjectivă. **16.** Fie $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri şi deci conform problemei 47, cap. XIX, $f = \varphi_n$, $n \in \mathbf{Z}$. Mai mult, $n = \varphi_n(1) = \varphi_n(1 \cdot 1) = \varphi_n(1)\,\varphi_n(1) = n^2$, de unde deducem $n = 0$ şi $n = 1$. Astfel sunt doar două omomorfisme de inele de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$ şi anume φ_0 şi φ_1, adică cel nul şi cel identic. **17.** Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri şi deci conform problemei 52, cap. XIX, există $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ astfel încât $f(m) = m\hat{a}$ pentru $\forall m \in \mathbf{Z}$. Mai mult $\hat{a} = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = \hat{a}^2$. Reciproc, dacă luăm un element $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ cu $\hat{a}^2 = \hat{a}$, atunci aplicaţia

$\varphi_{\hat{a}} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\hat{a}}(y) = \hat{x}a$ este un omomorfism de inele. **18.** Fie $f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. După problema 56. cap. XIX, dacă $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$, $\bar{a} = f(\hat{1})$, atunci $m\bar{a} = \bar{0}$. Mai mult $\bar{a}^2 = \bar{a}$. Reciproc, dacă $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$, cu $m\bar{a} = \bar{0}$ şi $\bar{a}^2 = \bar{a}$, atunci aplicaţia $\varphi_{\bar{a}} : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\bar{a}}(x) = x\bar{a}$ este un omomorfism de inele. **19.** I) Dacă $(a, n) = 1$, există $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încât $au + vn = 1$. Soluţia ecuaţiei este $x = \widehat{ub}$; II) Se poate demonstra prin reducere la absurd; III) Dacă $d = (a, n)$ şi $d \mid b$, fie $n = n_1d$ şi $b = b_1d$. Fie, de asemenea, $u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încât $au + nv = d$. Atunci $x_0 = \widehat{ub_1}$, este o soluţie a ecuaţiei. Atunci $x_k = x_0 + \widehat{kn_1}$, $k = 0, 1, 2, ..., d - 1$, sunt d soluţii distincte ale ecuaţiei. **20.** Observăm că $ux - uy = u(x - y)$ şi $(ux)(uy) = u^2xy = uxy$ pentru orice $x, y \in A$, deci A_1 este subinel al lui A. Pentru partea a doua fie $A_2 = (1 - u)A = \{(1 - u)x \mid x \in A\}$. Deoarece $1 - u \notin \{0, 1)$ şi $(1 - u)(1 - u) = 1 - 2u + u^2 = 1 - u$ rezultă conform celor mai de sus că A_2 este un subinel al lui A; c) şi d) imediat acum din faptul că $u(1 - u) = u - u^2 = 0$. Din d) rezultă că scrierea lui $x \in A$ sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ este unică, deci $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ este bine definită. Faptul că $f : A \to A_1 \times A_2$, $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ (operaţiile în A se efectuează pe „componente") este un izomorfism rezultă imediat din c), d) şi din unicitatea scrierii $x = x_1 + x_2$ (omomorfismul invers este $g : A_1 \times A_2 \to A$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$). **21.** a) Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului; b) $f : A \to A_1$, $f(a) = (0, a)$ este izomorfismul căutat (se vede uşor că $A' = \{(0, a) \mid a \in A\}$ este un subinel al lui A_1). Operaţia $x \circ y = x + y - xy$ este asociativă şi 0 este element neutru, deci $(A, \circ)$ este un monoid. Acum $x \in A$ este simetrizabil în $(A, \circ) \Leftrightarrow$ există $y \in A$ astfel încât $x \circ y = y \circ x = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ astfel încât $x + y - xy = y + x - yx = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.î. $(1 - x)(1 - y) = (1 - y)(1 - x) = 1 \Leftrightarrow (0, 1 - x) \in A_1$ este simetrizabil în A_1. **22.** a) Observăm că sistemul nu poate fi rezolvat prin metoda substituţiei, deoarece nici unul din coeficienţii săi nu este inversabil în $\mathbf{Z}_{12}$. Scăzând prima ecuaţie din a doua obţinem: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ x + y = \hat{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{0} \\ x + y = \hat{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \widehat{11} \\ y = \hat{2} \end{cases}$. b) Deoa-

rece $\hat{7}$ este inversabil în $\mathbf{Z}_{12}$, putem aplica şi metoda substituţiei, scoţând pe x din prima ecuaţie. Sistemul este incompatibil. **23.** a) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$. **24.** Dacă $a, b \in A$, avem că $a^2 - a$, $b^2 - b$, $(a + b)^2 - (a + b) \in \mathbf{Z}(A)$ şi rezultă $ab + ba \in \mathbf{Z}(A)$. Apoi, $a^2 \in \mathbf{Z}(A)$ şi deci $a = a^2 - (a^2 - a) \in \mathbf{Z}(A)$, pentru orice a. **25.** Există două astfel de structuri neizomorfe. Avem inelul nul în care produsul oricăror două elemente este nul şi inelul $\mathbf{Z}_p$. **26.** a) Fie $z = m + ni$. Avem $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 0 \Leftrightarrow m = n = 0 \Leftrightarrow z = 0$; b) Fie $z = m + ni$, $z' = m' + n'\mathrm{i}$. Avem $\varphi(zz') = \varphi((m + ni)(m' + n'\mathrm{i})) = \varphi((mm' - nn') + (mn' + m'n)\mathrm{i}) = (mm' - nn')^2 + (mn' + m'n)^2 = (m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = \varphi(z)\varphi(z')$; c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$, $z = m + ni$, $z' = m' + n'\mathrm{i} \neq 0$. Atunci $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{m+ni}{m'+n'\mathrm{i}} = \dfrac{mm'+nn'}{m'^2+n'^2} + \dfrac{-mn'+m'n}{m'^2+n'^2}\mathrm{i} = \alpha + \beta\mathrm{i}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încât $|\alpha - u| \leq \dfrac{1}{2}$ şi $|\beta - v| \leq \dfrac{1}{2}$ şi punem $q = u + v\mathrm{i}$. Se verifică că $r = z - qz'$, are proprietatea că $\varphi(r) < \varphi(z')$; d) Avem $z \in \{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \Rightarrow z$ este inversabil $\Rightarrow$ există $z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ cu $zz' = 1 \Rightarrow \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z') = 1 \Rightarrow \varphi(z) = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 0$ şi $n^2 = 1$ sau $m^2 = 1$ şi $n^2 = 0 \Rightarrow z \in \{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$. **27.** c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, $z = m + n\mathrm{i}\sqrt{2}$, $z' = m' + n'\mathrm{i}\sqrt{2} \neq 0$. Atunci $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{m+n\mathrm{i}\sqrt{2}}{m'+n'\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{mm'+2nn'}{m'^2+2n'^2} + \dfrac{-mn'+m'n}{m'^2+2n'^2}\mathrm{i}\sqrt{2} = \alpha + \beta\mathrm{i}\sqrt{2}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $q = u + v\mathrm{i}\sqrt{2}$, astfel încât $|u - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}$ şi $|v - \beta| \leq \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Luând $r = z - qz'$, obţinem că $\varphi(r) < \varphi(z')$. **28.** a), b), c). Analog cu problemele precedente; d) Fie $z = m + n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ un element

inversabil. Există deci $z' = x + y\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ a.î. $zz' = 1$, ceea ce conduce la sistemul $mx + 2ny = 1$, $nx + my = 0$. Condiţia necesară şi suficientă ca pentru $m, n \in \mathbf{Z}$, daţi, sistemul precedent să aibă o soluţie unică cu $x, y \in \mathbf{Z}$ este $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ (condiţia este evident suficientă) necesitatea rezultă deoarece conform primei ecuaţii $(m, n) = 1$ şi se ţine seama de forma termenului liber. Deci $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ inversabil. Definim acum recurent următorul şir de numere întregi: $x_0 = y_0 = 1$; $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$. Numerele de forma $x_n + y_n\sqrt{2}$ sunt toate distincte, deoarece deducem de mai sus că $x_n + y_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ şi evident $1 + \sqrt{2} \neq \pm 1$. Conform punctului b) al problemei (sau prin inducţie după n) rezultă că $\varphi(z_n) = \varphi(x_n + y_n\sqrt{2}) = 1$, deci numerele distincte $x_n + y_n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sunt inversabile. **29.** Rezultă din problema 7 din acest capitol. **30.** Fie A un inel integru finit şi $a \in A$, $a \neq 0$. Definim $\varphi_a : A \to A$ prin $\varphi_a(x) = ax$. Deoarece A este integru rezultă că φ_a este injectivă şi cum A este finit este şi surjectivă. Există deci $a' \in A$ cu $aa' = 1$. Aplicăm acum problema 5. Mai trebuie verificat că orice element nenul din K are inversul (în raport cu înmulţirea numerelor reale) tot în K. Fie deci $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \neq 0$, cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$. Dacă cel puţin unul din numerele a, b, c este nul (nu toate !) se verifică imediat că $\frac{1}{x} \in K$ prin amplificare cu conjugata numitorului. Dacă $abc \neq 0$ avem succesiv:

$$\frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{b}{a}\sqrt[3]{2} + \frac{b^2}{a^2}\sqrt[3]{4} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{b^3}{a^3} + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{bc}{a^2} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}}.$$

Amplificând încă o dată cu conjugata numitorului obţinem că $\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} \in K$. *Observaţie*. Exact ca şi mai înainte se arată că

dacă $\alpha \in \mathbf{Q}$ nu este cubul unui număr raţional atunci $K_1 = \{a + b\sqrt[3]{\alpha} + c\sqrt[3]{\alpha^2} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ este un corp. **33.** Fie $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ un omomorfism de corpuri. În particular, f este un omomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ în el însuşi. Conform problemei 53. cap XIX rezultă că există $q \in \mathbf{Q}$ astfel încât $f(x) = qx$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$. Mai mult, $f(xy) = f(x)f(y)$ oricare $x, y \in \mathbf{Q}$ şi deci $qxy = q^2xy$, de unde $q = 0$ şi $q = 1$. Rezultă că singurul automorfism al corpului $\mathbf{Q}$ este cel identic. **34.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un automorfism al corpului $\mathbf{R}$. Din problema precedentă rezultă că $f(r) = r$ pentru $r \in \mathbf{Q}$. Fie acum $x > 0$. Există deci $y > 0$ cu $y^2 = x$ şi prin urmare $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 > 0$. Rezultă că pentru orice $x < y$ avem $-f(x) + f(y) = f(x - y) > 0$, adică f este strict crescătoare. Vom arăta că f este omomorfismul identic al lui $\mathbf{R}$. Presupunem prin absurd, că f nu este omomorfismul identic şi fie $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ cu $f(x) \neq x$. Dacă $f(x) < x$ alegem $r \in \mathbf{Q}$ cu $f(x) < r < x$ şi obţinem $f(r) = r > f(x)$, contrar monotoniei lui f. Analog, se ajunge la o contradicţie pentru $f(x) > x$. **35.** Fie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un morfism de corpuri cu $f(x) = x$ pentru $x \in \mathbf{R}$. dacă $f(\mathrm{i}) = \alpha$, atunci $-1 = f(-1) = f(\mathrm{i}^2) = (f(\mathrm{i}))^2 = \alpha^2$, deci $\alpha \in \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Pentru $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ obţinem $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x + f(\mathrm{i})y = x + \mathrm{i}y = z$ iar pentru $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ obţinem $f(z) = \bar{z}$. Deci singurele morfisme de corpuri $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ care invariază $\mathbf{R}$ sunt identitatea şi conjugarea, care sunt evident chiar automorfisme.

36. c) Aplicaţia $f : \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \to K$, $f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & d \\ db & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism de corpuri. **37.** Fie K un corp comutativ. Să presupunem prin absurd că $f : (K, +) \to (K^*, \cdot)$ este un izomorfism de grupuri. Atunci $f(0) = 1$ şi există $x \in K$, $x \neq 0$, cu $f(x) = -1$. Avem $f(-x) = f(0 - x) = \dfrac{f(0)}{f(x)} = \dfrac{1}{-1} = -1$. Cum f este injectivă rezultă $x = -x$, adică $2x = 0$. Deci $(2 \cdot 1_K)x = 0$ (1_K fiind unitatea corpului K), de unde $2 \cdot 1_K = 0$. Este clar că $2y = 0$, oricare $y \in K$. Avem $1 = f(0) = f(2 \cdot 1) = (f(1))^2$. Dar $(f(1))^2 - 1 = (f(1) - 1)^2 = 0$. Deci $f(1) - 1 = 0$, adică $f(1) = 1$. Cum f este injectivă, rezultă $1 = 0$, contradicţie. **38.** Elementul unitate este $(1, 0)$. Dacă $(a, b) \neq (0, 0)$, atunci $(a, b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. $K_1 = \{(x, 0) \mid x \in K\} \subset K \times K$ este un subcorp al lui $K \times K$ şi aplicaţia $f : K \to K_1$ definită prin $f(x) = (x, 0)$ este un izomorfism de corpuri. Ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ are în corpul $K \times K$

soluţia $x = (0, 1)$. Fie $K = Z_p$, p număr prim de forma $4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$. Să presupunem că $x \in K$, are proprietatea $x^2 + 1 = 0$. Atunci după teorema lui Fermat (probl. 75. cap XIX.), rezultă $1 = x^{p-1} = \left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$, contradicţie. **39.** Dacă $\alpha = \hat{1}$, rangul matricei este 2. Dacă $\alpha \neq \hat{1}$, rangul este 3. **40.** Matricea este inversabilă numai pentru $\alpha = 0$, inversa, în acest caz, fiind $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **41.** G are 27 elemente. **42.** a) Sistemul este nedeterminat: $x = 4 + 3\lambda$, $y = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}_5$; b) Sistemul are soluţie unică: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **43.** Sistemul este compatibil nedeterminat, pentru orice $\alpha \in \mathbf{Z}_5$. Pentru $\alpha \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}\}$, un minor principal este dat de coeficienţii necunoscutelor x_1, x_2, x_3. Pentru $a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$, un minor principal este dat de coeficienţii necunoscutelor x_1, x_2, x_4. **46.** a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$ este ireductibil; b) $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$ este ireductibil; c) $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1)$; d) $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. **47.** Polinomul este ireductibil pentru $a = \hat{2}$. **48.** Conform teoremei lui Fermat, $x^6 = 1$ pentru $x \in \mathbf{Z}_7$. Dacă $a \neq \hat{0}$, atunci pentru $x = a^{-1}$, obţinem: $(a^{-1})^6 + aa^{-1} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$. Deci pentru $a \neq \hat{0}$, polinomul este ireductibil. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{3})(X^3 + \hat{3})$. **49.** Dacă A este un astfel de inel, iar e este elementul unitate al său, se arată că $\text{ord}(e) = n$ şi deci orice element din A se scrie sub forma ke, $0 \leq k < n$, iar $ne = \hat{0}$. Asocierea $\hat{k} \to ke$ dă un izomorfism de inele $\mathbf{Z}_n \to A$. Cum pentru fiecare alegere a lui e de ordin n există un astfel de izomorfism, rezultă că sunt $\varphi(n)$ structuri de inel unitar pe $(\mathbf{Z}_n, +)$. **51.** Dacă $x \in A$, $x^n = 0$, avem $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}) = 1 - x^n = 1$. De aici rezultă imediat cerinţele problemei. **52.** Pentru o implicaţie se aplică problema precedentă. Reciproc, fie f inversabil şi $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ astfel încât $fg = 1$. Avem $a_0b_0 = 1$, $a_nb_m = 0$, $a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m = 0$ etc. Deci a_0 este inversabil şi raţionând inductiv, avem $a_n^{k+1}b_{m-k} = 0$ pentru orice $k = 0, 1, \ldots, m$. Obţinem $a_n^{m+1}b_0$ şi deci a_n este nilpotent. Avem că

$f_1 = f - a_nX^n$ este de asemenea inversabil şi, ca mai înainte, rezultă că a_{n-1} este nilpotent ş.a.m.d. **53.** Dacă $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ este divizor al lui zero în $A[X]$, fie $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ un polinom de grad minim încât $gf = 0$. Atunci $a_n b_m = 0$ şi deoarece $a_n g$ este un polinom de grad $< m$, astfel încât $(a_n g)f = 0$, rezultă că $a_n g = 0$. Succesiv se arată că $a_{n-k} g = 0$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$ şi deci $a_i b_j = 0$ pentru orice i, j. Cum $g \neq 0$, există $b_k \neq 0$ şi avem $b_k f = 0$. **55.** Se aplică problema precedentă, luând $p = 2$, demonstrându-se că polinomul $X^4 + X^3 + \hat{1}$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_2[X]$. **56.** b) O matrice pătratică cu coeficienţi din K este inversabilă $\Leftrightarrow$ orice combinaţie liniară cu coeficienţi din K, care nu sunt toţi nuli, a liniilor (respectiv coloanelor) sale este nenulă. Deci pentru a găsi numărul matricelor din $GL_n(K)$ procedăm astfel: Considerăm mai întâi o linie arbitrară, nenulă, cu n elemente din K. Sunt $q^n - 1$ posibilităţi de alegere a acesteia. Apoi, alegem o linie care să fie independentă de prima (să nu se obţină din prima prin înmulţire cu un element). Sunt $q^n - q$ posibilităţi de alegere a acesteia. Fie $q^n - q^2$ posibilităţi de alegere a acesteia ş.a.m.d. Se găsesc $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\ldots(q^n - q^{n-1})$ matrice cu proprietatea că nu există o combinaţie liniară cu coeficienţi nu toţi nuli a liniilor sale. Aceste matrice sunt toate elementele lui $GL_n(K)$.

Capitolul XXI
PROBLEME PENTRU CONCURSURI DE MATEMATICĂ

1. Dacă toate aplicaţiile $f_n (n \geq 1)$ sunt surjective, afirmaţia este evidentă. Pentru cazul general, se notează pentru fiecare $k \geq 0$ mulţimile $B_{k,t} = (f_{k+1} \circ f_{k+2} \ldots\ldots \circ f_{k+t})(A_{k+t})$ oricare $t \geq 1$. Avem şirul descendent $A_k \supseteq B_{k,1} \supseteq B_{k,2} \supseteq \ldots\ldots \supseteq B_{k,t} \supseteq \ldots$. Cum A_k este finită, există un t_0 astfel încât $B_{k,t_0} = B_{k,t_{0+1}} = \ldots$. Notăm $B_k = B_{k,t_0}$. Avem $B_k \neq \emptyset$. În continuare se arată că restricţia aplicaţiilor f_k la B_k este o funcţie surjectivă de la B_k la B_{k-1}. **2.** Fie $f(0) = \alpha$. Dacă $\alpha = 0$, din condiţia problemei, rezultă pentru $y = 0, f(f(x)) = f(x)$, oricare $x \in [0, 1]$. Dacă presupunem că $\alpha \neq 0$,

se arată prin inducţie matematică că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{n ori}}(a) = (n + 1)\alpha$. Pentru n suficient de mare avem $(n + 1)\alpha > 1$, ceea ce contrazice faptul că $f(x) \leq 1$, oricare $x \in [0, 1]$. Deci $\alpha = 0$, caz analizat mai înainte. Funcţia $g : [0, 1) \to \to [0, 1]$, definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \beta \\ 1, & \beta < x \leq 1 \end{cases}$, unde $\beta \in (0, 1)$ satisface condiţia problemei. **3.** Se înlocuieşte x cu $b - a - x$ şi se obţine egalitatea $\alpha f(b - x) + \beta f(a + x) = g(b - a - x)$. Împreună cu relaţia din enunţ se obţine un sistem liniar din care se deduce $f(a + x)$; din aceasta se obţine imediat $f(x)$. **4.** Avem $a_n = \sqrt{a_0^2 + n}$. dacă $a_0 = 0$ se obţine şirul $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}, \dots$ care conţine subşirul infinit $\{\sqrt{p}\}$, unde p este număr prim şi în care toate elementele sunt numere iraţionale. Dacă $a_0 \neq \neq 0$, considerăm subşirul dat de $n = (p - 1)a_0^2$, unde p este număr prim şi în care toate elementele sale sunt numere iraţionale. **5.** Se arată mai întâi că $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$, de unde rezultă imediat că $\left[\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2\right] = 4n + 1$. **6.** Mulţimea cerută este $\{0, 1\}$. **7.** Pentru $k \in \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. **8.** Avem $(a + b - c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - - bc) \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{3} + 2(ab - ac - bc) \geq 0 \Rightarrow 2(ac + bc - ab) \leq \frac{5}{3} \Rightarrow ac + bc - - ab \leq \frac{5}{6} < 1$. **9.** Să presupunem că $x \leq y \leq z$. Atunci $z - x \leq \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz} \Rightarrow 3(z - x)^2 \leq 2[(x - y)^2 + (z - x)^2 + + (y - x)^2]$ sau $2[(x - y)^2 + (y - x)^2] \geq [(x - y) + (y - x)]^2$, inegalitate adevărată în mod evident. **10.** $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow 7 > \frac{m^2}{n^2}$ sau $7n^2 > m^2$. Avem că 7 nu divide $m^2 + 1$ şi 7 nu divide $m^2 + 2$. Deci $7n^2 \geq m^2 + 3$, de unde $7 \geq \geq \frac{m^2 + 3}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}\left(m + \frac{1}{m}\right)^2$ sau $\sqrt{7} \geq \frac{m}{1} + \frac{n}{mn}$. Egalitatea are loc pentru $m = = 1$, dar în acest caz se vede că $\sqrt{7} > 2 > \frac{2}{n}$. **11.** Avem $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} <$

$< \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \frac{a_{k+1}}{k+1}$ sau $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < a_{k+1}$. Dacă considerăm funcţia $S : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $s(k) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$, aceasta este crescătoare şi deci pentru $k \leq n$ avem $S(k) < S(n)$, adică inegalitatea din stânga. Pentru cealaltă inegalitate considerăm şirul $-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_1$ şi avem $\frac{(-a_n)+\ldots+(-a_{k+1})}{n-k} < \frac{(-a_n)+\ldots+(-a_1)}{n}$.

12. Inegalitatea se scrie $0 \leq (n - 3)(x^4 + y^4 + z^4) + (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2$. Rezultă $n = 3$. **13.** Pentru $m < n$, scriem suma $S = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i}\max(i, k) + \sum_{k=i+1}^{n}\max(i, k)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i} i + \sum_{k=i+1}^{n} k\right) = \sum_{i=1}^{m}(i^2 + (i+1) + (i + 2) + \ldots + n)$, care calculată ne dă $S = \frac{m}{12}(m^2 - 1 + 3n^2 + 3n)$.

Pentru $m = n$, scriem $S = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\max(i, k) + \sum_{k=1}^{m}\max(m, k)$. Dar, de mai înainte, se obţine. $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\max(i, k) = \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$. Este clar că $\sum_{k=1}^{m}\max(m, k) = m^2$; deci $S = m^2 + \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$. **14.** Observăm că pentru $m^2 \leq k < (m + 1)^2$. avem $\left[\sqrt{k}\right] = m$. Scriem $S = \sum_{k=1}^{2^2-1}\left[\sqrt{k}\right] + \sum_{k=2^2}^{3^2-1}\left[\sqrt{k}\right] + \ldots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right] + n$ şi ţinând seamă de observaţia de mai sus se obţine, după calcule, $S = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$. **15.** Se face schimbarea $y = x - 2$ şi se obţine inegalitatea $(m - 1)y^2 + (3m - 1)y + 2m - 6 > 0$, care trebuie să fie adevărată pentru orice $y > 0$. **16.** Scriem $cx^2 - bx + a = c(x^2 - 1) + (a + b + c)\frac{1-x}{2} + (a - b - c)\frac{1+x}{2}$. **17.** $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$. **18.** $a \neq 0$, $b = 0$ şi $a \neq 0$, $b = 1$. **19.** $(\sqrt{a}, \sqrt{a}, \ldots,$

$\sqrt{a}$); $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \dots, -\sqrt{a})$. **20.** Se logaritmează ambii membri şi grupând termenii se obţine $(a_2 - a_n)(\lg a_2 - \lg a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)(\lg a_{n-1} - \lg a_n) \geq 0$. Dar $a_{k-1} - a_k$ şi $\lg a_{k-1} - \lg a_k$ au acelaşi semn şi deci totul rezultă. **21.** Dacă $x \geq 1$, atunci $x = 2^k \cdot 2^\alpha$, $k \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < 1$. De aici $\log_2 x = k + \alpha$ şi deci $[\log_2 x] = k$. Din $[x] \leq x$ rezultă $k \leq \log_2 [x] \leq k + \alpha$ şi $[\log_2 x] = k$. Deci $0 \leq \log_2 x - \log_2 [x] \leq \alpha$, de unde $[\log_2 x - \log_2 [x]] = 0$. Celălalt membru este de asemenea zero. **22.** Fie $s = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}$. Avem $2s = \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_3 a_4} + \dots + \frac{2}{a_{2n-2} a_{2n-1}} + \frac{2}{a_{2n-1} a_{2n}} <$

$$< \frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{a_1 - a_0}{a_0 a_1} + \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} a_{2n-2}} + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{a_{2n-1} a_{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{2n}{a_0 a_{2n}}.$$

Deci $s < \frac{n}{a_0 a_{2n}}$. Analog, se demonstrează cealaltă inegalitate. **23.** Pentru $m = 1$, $n = 2 \Rightarrow f(2) = f(1) f(2) \Rightarrow f(1) = 1$; $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 2 \cdot 2 = 4$. $2 < 3 < 4 \Rightarrow f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 2 < f(3) < 4 \Rightarrow f(3) = 3$. Presupunem că pentru $k < n$ avem $f(k) = k$. Fie $n = 2p \Rightarrow f(n) = f(2 \cdot p) = 2f(p) = 2 \cdot p \Rightarrow f(n) = n$. Dacă $n = 2p - 1 \Rightarrow f(n + 1) = f(2p) = 2p$. $n - 1 < n < n + 1 \Rightarrow f(n - 1) < f(n) < f(n + 1) \Rightarrow n - 1 < f(n) < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$. Deci $f = 1_{\mathbf{N}}$. **25.** Se poate demonstra prin inducţie matematică. Fie n numărul maxim de cititori aflaţi la un moment dat în sala de lectură. Dacă $n = 1$, atunci toţi cititorii au intrat în mod succesiv. Pentru a trece de la pasul n la pasul $n + 1$, observăm că problema rămâne evident aceeaşi dacă îi adăugăm presupunerea suplimentară că de fiecare dată al $(n + 1)$-lea cititor intrat în sală iese primul dintre cei $n + 1$. Fiecare astfel de cititor va scrie de fiecare dată numerele (n, n), problema revenind la pasul precedent. **26.** Fie $E = C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$. Se arată prin calcul că

$E+2^{2n-1}C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}\left(\frac{1}{1(2^{n-1}-1)}+\frac{1}{2(2^{n-1}-2)}+...+\frac{1}{(2^{n-2}-1)(2^{n-2}+1)}\right)$ se divide cu 2^{2n}. Dar se arată că $C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}\left(\frac{1}{1(2^{n-1}-1)}+...+\frac{1}{(2^{n-2}-1)(2^{n-2}+1)}\right)$ este multiplu de 2. (Se ţine cont că 2 | $C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$).**27.** $5^{\sqrt{6}}<6^{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{30}} < 6^5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5^{2\sqrt{30}}<6^{10}$. Dar $5^{2\sqrt{30}}<5^{11}$. Se arată că $5^{11} < 6^{10}$. Într-adevăr, 6^{10} = $= (5 + 1)^{10} = 5^{10} + C_{10}^1 \cdot 5^9 + C_{10}^2 \cdot 5^8 + C_{10}^3 5^7 + ... + C_{10}^9 \cdot 5 + C_{10}^{10} > 5^{10} +$ $+ 10 \cdot 5^9 + 5 \cdot 9 \cdot 5^8 + 120 \cdot 5^7 > 5^{11}$. **28.** Fie $\alpha = \left(\sqrt{26}+5\right)^{101}$. Avem $\alpha = \left(\sqrt{26}+5\right)^{101} - \left(\sqrt{26}-5\right)^{101} + \left(\sqrt{26}-5\right)^{101} = a + \left(\sqrt{26}-5\right)^{101} = a +$ $+\frac{1}{\left(\sqrt{26}-5\right)^{101}} < a+\frac{1}{(2\cdot 5)^{101}} = a+\frac{1}{10^{101}} = a,\underbrace{0\,0\,0...0}_{100 \text{ ori}}1$ ($a \in \mathbf{Z}$).

29. Dacă notăm $S_m = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_m^n$, observăm că $S_0 + S_{n-1} = S_1 + S_{n-2} = ... = S_{n-1} + S_0 = 2^n$. **30.** Se poate demonstra folosind varianta a doua a metodei inducţiei matematice, după numărul b al băieţilor. **31.** Numerele de forma $n_k = 3^k$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. **32.** $p = 3$. **33.** Presupunem prin absurd, că există $n \mid 2^n - 1$. Fie p cel mai mic număr prim care divide pe n, iar k cel mai mic număr natural astfel încât $p \mid (2^k - 1)$. Avem $p \mid (2^k - 1)$ şi $p \mid (2^{p-1} - 1)$ (conform micii teoreme a lui Fermat). Deci $k \mid (p - 1)$. Dar $n \mid (2^n - 1)$ şi $p \mid n$ implică $k \mid n$. Aşadar k este un divizor al lui n mai mic decât p, contradicţie. **34.** Numerele de forma $n_k = (p - 1)(pk + 1)$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. **35.** Avem $5 \mid (2^n - 3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4 \mid (n - 3)$ şi $13 \mid (2^n - 3) \Leftrightarrow 12 \mid (n - 4)$. Se arată că nu există nici un număr natural n care să satisfacă în acelaşi timp condiţiile $4 \mid (n - 3)$ şi $12 \mid (n - 4)$. **36.** Observăm mai întâi că dacă 3 nu divide a, atunci $3 \mid (a + 1)$ sau $3 \mid (a - 1)$, de unde $9 \mid (a^3 + 1)$ sau $9 \mid (a^3 - 1)$. Aşadar, dacă 3 nu divide nici unul dintre numerele a, b, c, d, e, atunci $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 9k \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9, contradicţie. **37.** a) Numerele $n_k = 1 - a + k(a - b)$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. b) Se foloseşte punctul a). **39.** (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7); (8, 8, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 6); (8, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 6); (8, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6) şi permutările acestora. **40.** Se

arată că $2^{2^{n+1}}+3$ este multiplu de 7. **43.** Soluţiile ecuaţiei sunt: $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 2$, $y_2 = -5$. **44.** $p(q(x)) = x$. **45.** Se arată mai întâi că gradul n al acestor polinoame este ≤ 3. Se găsesc 12 polinoame: $\pm(x^2 - 1)(x \pm 1)$, $\pm(x^2 + x - 1)$, $\pm(x^2 - 1)$, $\pm(x \pm 1)$. **47.** Fie $u_i = q_i m + r_i$, $0 \leq r < m$. Observăm că $X^m - 1 = (X - 1)P(X)$. Apoi, $X^{u_i} = X^{q_i m + r_i} = X^{r_i}\left(X^{q_i m} - 1\right) + X^{r_i}$. Cum $X^m = (X - 1)P(X) + 1$, obţinem $X^{q_i m} = A_i(X)P(X) + 1$, unde $A_i(X)$ este un polinom in X. Deci $Q(X) = G(X)P(X) + \left(X^{r_1} + X^{r_2} + \ldots + X^{r_n}\right)$. Aşadar $P(X) \mid Q(X) \Leftrightarrow P(X) \mid X^{r_1} + X^{r_2} + \ldots + X^{r_n}$ $(= H(X))$. Dar cum $H(X) =$ $= n_0 + n_1 X + \ldots + n_{m-1}X^{m-1}$ are gradul mai mic sau egal decât grad $P(X)$, rezultă că $P(X) \mid H(X) \Leftrightarrow$ există $\alpha \in \mathbf{R}$, astfel încât $H(X) = \alpha P(X)$. De aici rezultă $n_0 = n_1 = \ldots = n_{m-1}$. **48.** Se poate demonstra prin inducţie după n = grad P. **49.**

$$\sum_{\sigma \in S_n}(-1)^{m(\sigma)}m(\alpha) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)<\sigma(2)}}(-1)^{m(\sigma)}m(\sigma) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(2)<\sigma(1)}}(-1)^{m(\sigma)}m(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)<\sigma(2)}}(-1)^{m(\sigma)}m(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)<\sigma(2)}}(-1)^{m(\sigma)+1}(m(\sigma)+1) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)<\sigma(2)}}(-1)^{m(\sigma)+1} = -\sum_{\substack{\sigma \in R_n \\ \sigma(1)<\sigma(2)}}(-1)^{m(\sigma)}$$

. Dacă $n \geq 4$, există pentru orice permutare pară (impară) cu condiţia $\sigma(1) < \sigma(2)$ o permutare impară (pară) cu aceeaşi condiţie $\sigma(1) < \sigma(2)$. Deci ultima sumă este zero. Deci $\sum_{\sigma \in S_n}(-1)^{m(\sigma)}m(\sigma) = 0$ pentru $n \geq 4$. Se verifică uşor că pentru $n = 2$ şi $n = 3$ suma este egală cu -1. **51.** $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$ unde $k = \left[\frac{b}{a+b}(n+1)\right]$.

52. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 13\cdot 102+1 & 13\cdot 111 & 13\cdot 223 \\ 13\cdot 331 & 13\cdot 321+1 & 13\cdot 123 \\ 13\cdot 132 & 13\cdot 104 & 13\cdot 131+1 \end{vmatrix}$. Folosind proprietăţile determinanţilor, acesta rezultă egal cu $13k + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13k + 1$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Deci $\det A \neq 0$. **53.** Inversa este $I_n - AB$. **54.** Cum $e \in H$

rezultă $a = ae \in bk$, $k \in K$ şi deci $b^{-1}a \in K$. De aici rezultă $H \subset K$. **55.** Se poate observa că ecuaţia $x^3 - 1 = 0$ are trei soluţii în **C** şi doar una în **R**. **57.** Avem $H \cap \mathbf{Z} \neq \{0\}$ şi deci $H \cap \mathbf{Z} = n\mathbf{Z}$, $n > 0$. De aici rezultă $n\mathbf{Q} \subset \subset H$. Dar $n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ şi deci $\mathbf{Q} = H$. **58.** Din $a^2 = b^2 \Rightarrow a = a^{-1}b^2$, $a = b^2a^{-1}$ şi $ab^{-1} = a^{-1}b$. Din $a^2 = abab \Rightarrow a = bab$ şi $ab^{-1} = ba$. Deci $a^{-1}b = ba$, de unde $(ab)^2 = abab = (a^{-1}b^2)b(b^2a^{-1})b = a^{-1}b^5(a^{-1}b) = a^{-1}b^5(ba) = a^{-1}(a^6)a$ (deoarece $a^2 = b^2$). Deci $a^2 = (ab)^2 = a^6 \Rightarrow a^4 = e$. De asemenea $b^4 = e$. **59.** $b^{2n} = (b^n)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Analog, $b^{3n} = (b^n)^3 = ab^3a^{-1}$. Mai mult, $(b^n)^n = b^{n^2} = ab^na^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} = b$ (deoarece $a^2 = e$). Deci $b^{n^2} = b$, de unde $b^{n^2-1} = e$. **60.** $b^{2k} = (b^k)^2 = (aba^{-1})\,(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Mai mult, $b^{k^2} = (b^k)^k = ab^ka^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2}$. Apoi $\left(b^{k^2}\right)^k = (a^2ba^{-2})^k =$ $= a^2b^ka^{-2} = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} \Rightarrow b^{k^3} = a^3ba^{-3}$. În general, $b^{k^m} = a^mba^m = b$ (deoarece $a^m = e$). Deci $b^{k^m-1} = e$. **64.** Se foloseşte egalitatea $(1 + 1)(a + b) = (1 + 1)a + (1 + 1)b$. **65.** Dacă $u \in A$ este inversul lui $1 - ab$, atunci inversul lui $1 - ba$ este $1 + bua$. **68.** Se foloseşte identitatea $(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$, precum şi problema 65. **69.** Pentru a arăta că este corp se foloseşte problema 5, cap. XVII. Soluţiile ecuaţiei sunt matricele A (a, b, c, d) astfel încât $a = 0$ si $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. **70.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm Tr $A = a + b$; A verifică ecuaţia $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)I_2 = 0$. Dacă Tr $A = 0$, atunci $A^2 = (bc - ad)I_2$ şi deci A^2 comuta cu orice matrice din $M_2(\mathbf{C})$. Se arată că Tr $[(A, B)]$ = Tr $(AB - BA) = 0$, de unde rezultă afirmaţia i). Din afirmaţia i) rezultă afirmaţia ii). **71.** Din $x^6 = x$ şi $(-x)^6 = -x$ rezultă $(-x) = x$, adică, $2x = 0$ oricare ar fi $x \in A$. Din $(x + 1)^6 = x + 1$, dezvoltând termenul stâng, se obţine: $(x^6 - x) + 2(3x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 3x) + (x^4 + x^2) = 0$, de unde $x^4 + x^2 = 0$, adică $x^4 = -x^2 = x^2$. Înmulţind ambii membri ai egalităţii $x^4 = x^2$ cu x^2 se obţine $x^2 = x$. **73.** i) Din $x^3 = x$, $x^4 = x^2$, se deduce $(x^2yx^2 - x^2y)^2 = (x^2yx^2 - yx^2)^2 = 0$, oricare $y \in$ A; ii) Avem $(x^2yx^2 - x^2y)^3 = x^2yx^2 - x^2y = 0$. La fel, $x^2yx^2 - yx^2 = 0$, adică $x^2yx^2 = yx^2$; atunci $x^2y = yx^2$, oricare $x, y \in$ A. Dar, $xy = x^3y^2$ şi ţinând cont de cele precedente rezultă că $xy = yx$.

BIBLIOGRAFIE

1) *Alef$_0$, Algebră (Numere reale, calcul numeric, numere complexe)*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

2) Becheanu M., *Teste de algebră pentru liceu*, Editura Europentic, Cluj-Napoca, 1995.

3) Becheanu M., Căzănescu V., Năstăsescu C., Rudeanu S., *Logică matematică şi teoria mulţimilor* (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică), Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

4) Buzeţeanu Ş., Niţă C., *Determinantul produsului a două matrice. Regula lui Laplace I, II*; Gazeta Matematică, seria metodică, 1985, 1987.

5) Călugăriţa Gh., Mangu V., *Probleme de matematică pentru treapta I şi a II-a de liceu*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1977.

6) Commissaire H., Anzemberger E., *Exercises d'Algebre et de Trigonometrie*, Paris, 1923.

7) Coşniţă C., Turtoiu F., *Culegere de probleme de algebră*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1972.

8) Chiriac V., Chiriac M., *Probleme de algebră*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977.

9) Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. H., *Posobie po matematike dlia postupaiuşcih v vuzî*, Moskva, 1976.

10) Fadeev D. K., Sominski I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1954.

11) Georgescu-Buzău E., Matei N., *Exerciţii de teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

12) Iaglom I. M., Iaglom A. N., *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1962.

13) Ioachimescu A. G., *Culegere de probleme de algebră*, ediţia a V-a, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

14) Ionescu-Ţiu C., Pîrşan L., *Algebră şi analiză matematică pentru admitere în facultate*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1974.

15) Ikramov H. D., *Zadacinik po lineinoi algebre*, Moskva, 1975.

16) Kuterov A., Rubanov A., *Zadacinik po algebre i elementarnîm funcţiiam*, Moskva, 1974.

17) Năstăsescu C., *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

18) Năstăsescu C., Niţă C., Vraciu C., *Bazele algebrei*, vol. I, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1986.

19) Năstăsescu C., Savu I. ş.a., *Computer Matematica*, nr. 1-6.

20) Nesterenko I. V., Olenik S. N., Potapov M. K., *Zadači vstupitelnîh eczamenov po matematike*, Moskva, 1986.

21) Niţă C., Spircu T., *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1974.

22) Novoselov S. I., *Curs special de algebră elementară*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1955.

23) Perju C., Perju R., *Probleme de matematică pentru admitere în învăţământul superior*, Ed. Militară, Bucureşti, 1974.

24) Rusu E., *Aritmetică şi teoria numerelor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.

25) Sklearski D. O., Cenţov N. N., Iaglom I. M., *Izbrannîe zadacii teoremî elementarnoi matematiki* (*Arifmetica i algebra*), Moskva, 1965.

26) Sominski I. S., Golovina L. I., Iaglom I. M., *O matematicescoi inducţii*, Moskva, 1967.

27) Stamate I., Crişan I., *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică pentru licee*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

28) Stamate I., Stoian I., *Culegere de exerciţii şi probleme de algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

29) Vîşenski V. A., Kartaşov N. V., Mihailovski B. I., Iardenko M. I., *Sbornik zadaci kievskih matematiceskih olimpiad*, Kiev, 1984.

30) *Matematică - Algebră* (manuale de liceu clasele IX-XII, ediţia 1980) Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

31) Colecţia „Gazeta Matematică - seria B".

32) Colecţia „Matematika v şkole".

Problemele şi exerciţiile propuse în această lucrare au fost grupate în capitole corespunzătoare celor din manualele de algebră pentru clasele IX - XII, acoperind întreaga programă de liceu şi respectând gradarea din punct de vedere al dificultaţii.

Lucrarea se adresează elevilor de liceu, candidaţilor la examenele de bacalaureat şi admitere în facultăţi, celor care doresc să participe la concursurile şcolare. De asemenea, poate fi utilizată şi de către profesorii de matematică în activitatea lor.

În această ediţie lucrarea a fost completată cu probleme şi exerciţii date la examene şi concursuri în ultimii ani.



EDITURA ROTECH PRO

ISBN 973-97010-6-x